

Revista de Matemática



Hipátia

Julho de 2026

Volume 4, Número 1



Matemáticos Jogando Bilhar

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Reitor: Paulo César Miguez de Oliveira

Pró-Reitoria de Extensão Universitária

Pró-Reitor: Guilherme Bertissolo

Instituto de Matemática e Estatística

Diretor: Kleyber Mota da Cunha

Departamento de Matemática

Chefe: Darllan Conceição Pinto

Revista de Matemática
Hipátia

Conselho Editorial

André Mandolesi

Cristina Lizana

Elaís Cidely S. Malheiro

Henrique da Costa

Márcia Barbosa

Nicola Sambonet

Roberto Sant'Anna

Samuel Feitosa

Equipe Técnica

Álison Conceição

Cleber Brito Figueiredo

Eldon Barros dos Reis Júnior

João Vítor Fonseca

José Valdomiro da Silva Neto

Yure Carneiro

Editor Responsável: Vinícius Mello

Endereço para Correspondência

Instituto de Matemática e Estatística

Av. Milton Santos, s/n, Campus Universitário de Ondina CEP: 40.170-110

hipatia@ufba.br



ISSN 3085-6256



SINOPSE

EPÍSTOLA

Inteligência Artificial	1
-------------------------------	---

HISTÓRIA

Ciências e Fotografia: 500 anos de História (II)	2
---	---

MEMÓRIA

Maria Augusta de Araújo Moreno: Uma Professora Modernizadora	24
---	----

PANORAMA

Caos em Bilhares Dinâmicos	33
----------------------------------	----

TÉCNICA

Um Passeio com Primos e Outros Caras Bacanas	39
---	----

PROBLEMA

O Jogo do EL e Outros Problemas	45
--	----



EPÍSTOLA

Inteligência Artificial

Caro Leitor,

Que efeitos a Inteligência Artificial terá sobre a Matemática e, mais amplamente, sobre a sociedade que estamos construindo? Essa pergunta, que até pouco tempo parecia assunto de ficção, hoje atravessa nossas salas de aula, nossos laboratórios, nossas profissões e até nossa maneira de ver e produzir imagens.

É justamente desse encontro entre técnica, ciência, imagem e vida social que trata o primeiro artigo desta edição, em nossa seção HISTÓRIA. Em *Ciências e Fotografia: 500 anos de História (II)*, Ana Lucia Pinheiro Lima conclui seu vasto painel sobre fotografia, industrialização, comunicação de massa, arte e ciência, até chegar às transformações contemporâneas mediadas por algoritmos matemáticos. Na seção MEMÓRIA, revisitamos a trajetória de Maria Augusta de Araújo Moreno, professora marcante na formação matemática baiana e personagem central no processo de modernização do ensino no Colégio de Aplicação e no então Instituto de Matemática e Física da UFBA. Em PANORAMA, Yuri Lima nos convida a um passeio por um dos cenários mais fascinantes dos sistemas dinâmicos: os bilhares. Entre modelos simples e regimes caóticos, o texto apresenta ideias centrais da área e mostra como perguntas geométricas aparentemente concretas abrem caminho para teorias profundas. Em TÉCNICA, Rafael Filipe dos Santos conduz o leitor por um roteiro elegante sobre números primos: da prova clássica de Euclides e variações em progressões aritméticas a resultados sobre fatores primos de sequências e distribuição dos primos, com exercícios instigantes ao final. Já em PROBLEMA, Yure Carneiro e Samuel Feitosa reúnem uma seleção variada de desafios, com destaque para *O Jogo do EL*, transitando por temas de álgebra, geometria, análise e combinatória em questões que convidam tanto à criatividade quanto ao rigor.

E, para terminar com uma nota bem-humorada: apesar de todas as incertezas sobre a IA, uma coisa já é certa: ela facilita bastante a vida do Editor. Seja na revisão de artigos, seja na criação de figuras. Na capa desta edição, por exemplo, pedimos ao ChatGPT que produzisse uma pintura no estilo de Edward Hopper representando matemáticos jogando bilhar em uma mesa elíptica.

Salvador, 25 de julho de 2026.
O Editor

HISTÓRIA

Ciências e Fotografia: 500 anos de História (II)

Ana Lucia Pinheiro Lima

Introdução

Compreender a HISTÓRIA e o funcionamento do mundo em que vivemos para, daí, entendermos o papel das ciências, e mesmo da nossa função dentro dele, requer um olhar atento às estruturas que sustentam esse organismo vivo que é a sociedade humana.

Como vimos na primeira parte deste artigo¹, ao final do século XIX surge um novo tipo de poder cuja força se sustentava na produção industrial, na produção e distribuição de energia e na comunicação. E, de certo modo, como veremos, essa nova estrutura determinou os rumos das ciências e, consequentemente, de toda a sociedade no século seguinte. Apesar da configuração social de hoje, aparentemente, ser muito distinta daquela de mais de 100 anos atrás, ainda continuamos a discutir sobre industrialização, reindustrialização e desindustrialização, para falarmos sobre a produção de riquezas; o controle das fontes de energia, e também de outros recursos naturais, ainda continuam causando guerras; e a comunicação tornou-se global.

O século XX testemunhou a maturidade de muitas ideias nascidas no século XIX, ideias que hoje, no século XXI, vemos se metamorfosear em frente aos nossos olhos. A produção de imagens por aparelhos foi uma dessas invenções. Da unicidade dos daguerreótipos à imaterialidade das imagens digitais e às imagens criadas pelos algoritmos que controlam os supercomputadores chamados de inteligências artificiais, 200 anos se passaram. O que a fotografia significa

hoje?

A história do século XX passa pela construção de uma nova arquitetura social onde ciência e imagem significam poder. No século XXI, vemos essa arquitetura em pleno funcionamento.

Mas, a rapidez em que toda essa transformação aconteceu tem consequências. E, no meio de tantas mudanças, continuamos devidamente distraídos.

Nesta segunda parte do texto, vamos acompanhar os principais acontecimentos históricos do século XX, tentando reconstruir o caminho percorrido pelas ciências até chegarmos à terceira década do século XXI.

Imperialismos, Industrialização e Relatividade

Os cinquenta primeiros anos do século XX podem ser descritos como tempos de convulsão: guerras mundiais, revoluções, colapso e ascensão de impérios, crises econômicas, crises das certezas.

As duas grandes guerras mundiais, a primeira iniciada em 1914, que durou 4 anos, e a segunda que ocorreu de 1939 a 1945, foram momentos de crise na organização e distribuição do poder em todo o globo. Iniciado sobre o domínio dos impérios coloniais europeus, estabelecidos nos séculos anteriores, o século XX encerra a sua primeira metade drasticamente diferente, o mundo passa a ser bipolar e pós-colonial [28, 24, 25].

De fato, nos anos da primeira década do século XX, os impérios industriais à época controlavam grande parte do planeta. Reino Unido, França, Bélgica, Império Alemão, Rússia Imperial, Império Austro-

¹publicada na edição anterior da Revista de Matemática Hipátia.

Húngaro, Império Otomano, Japão, em rápida ascensão, e Estados Unidos, tinham controle de extensas áreas da África e da Ásia, incluindo partes do Oriente Médio.

Na América Latina, o Brasil, que havia deixado de ser colônia em 1822 e se tornado República em 1889, fazia parte do *sistema imperial econômico*. A Inglaterra controlava o comércio marítimo mundial, incluindo o “livre comércio” no Atlântico, e tinha forte presença no sistema bancário e na infraestrutura do país, principalmente na construção de ferrovias no território brasileiro. Os Estados Unidos, com a Doutrina Monroe (1823), inicialmente com objetivo defensivo de “anti-colonialismo europeu nas Américas” passa, posteriormente, a defender a “predominância norte americana no hemisfério”; e a França, com a corrente filosófica Positivismo, de onde se origina a expressão *Ordem e Progresso* da nossa bandeira nacional, influenciavam a política e a cultura. Empresas alemãs, como a Bayer e a Siemens, se estabelecem no Brasil em 1896 e 1905, respectivamente, liderando setores industriais que surgiam no país.

Já em outros países da região as forças imperialistas se manifestaram militarmente: entre 1890 e 1910, Cuba, Porto Rico, Panamá, Colômbia, Nicarágua, República Dominicana, Haiti e México estiveram envolvidos em conflitos militares com Estados Unidos ou França.

Na primeira grande guerra, esses impérios competiam entre si por colônias, e seus recursos, influência, mercado, prestígio.

Ao final da primeira guerra, em 1918, as potências europeias estavam enfraquecidas economicamente. Colapsaram os impérios Austro-Húngaro, Otomano, Alemão e o império Russo Czarista, após a revolução Bolchevique, que levou o partido comunista ao poder. Em 1912, com a queda da dinastia Qing, encerra-se mais de 2.000 anos de história do império Chinês. Os Estados Unidos surge como o principal credor global e, com sua estrutura industrial intacta, se consolida como líder na produção industrial mundial. E também o Japão amplia a sua influência na Ásia. Após a primeira guerra Sino-Japonesa (1894-1895), da guerra Russo-Japonesa (1904-1905) e da primeira guerra mundial, o Japão tinha anexado ao seu território a península coreana, a ilha de Formosa (Taiwan), além de algumas ilhas do Pacífico e concessões territoriais na China, que antes da primeira guerra estavam sob domínio alemão.

No período chamado “entre guerras”, crises econômicas: a grande depressão de 1929 é considerada a pior crise econômica do sistema capitalista; instabi-

lidade política e ressentimentos nascidos nas derrotas da primeira guerra se avolumaram, culminando na segunda guerra mundial.

A Alemanha almejava tornar-se um império continental europeu, baseado, principalmente, em auto suficiência de recursos naturais, e para isso precisava conquistar o leste europeu e partes da Rússia, tornando-as colônias alemãs; e também um império etnicamente puro e superior, o que justificava o genocídio de judeus, ciganos, pessoas com limitações físicas e mentais, homossexuais e do povo eslavo.

O Japão também almejava autosuficiência econômica, leia-se: acesso a petróleo, ferro, borracha, carvão natural; e ser potência global. Para isso, o plano era dominar a China, Coréia, Sudeste Asiático e ilhas do Pacífico, estabelecendo a “Grande Ásia Oriental”.

A Itália fascista sonhava com o tempo do Império Romano e a influência sobre o Mediterrâneo. Participou das invasões da Albânia (1939) e da Grécia (1940).

Estimativas afirmam que o total de mortos em consequência da segunda guerra, incluindo fome e doenças, além dos conflitos armados, chega a mais de 50 milhões. O holocausto judeu vitimou 6 milhões de pessoas. A Polônia perdeu quase 20% da sua população, quando 1,8 milhões de civis não-judeus foram mortos. A Rússia, entre militares e civis, sofreu a perda de mais de 20 milhões de vidas. No total, estima-se que mais de 20 milhões de pessoas morreram durante as ocupações japonesas. Na China, no episódio conhecido como Massacre de Nanquim, durante 40 dias, de dezembro de 1937 a janeiro de 1938, foram mortas entre 200.000 e 300.000 pessoas.

As perdas humanas na Alemanha, na Itália e no Japão chegaram a 12,5 milhões de pessoas, incluindo as mais de 200.000 mortes decorrentes das bombas nucleares lançadas, em agosto de 1945, sobre as cidades japonesas de Hiroshima e Nagasaki.

As mortes foram em escala industrial.

Como uma resposta às atrocidades ocorridas, em 1948, foi adotada a *Declaração Universal dos Direitos Humanos*, pela ONU - Organização das Nações Unidas, órgão criado após a segunda grande guerra, estabelecendo direitos e liberdades fundamentais aplicáveis a todos os seres humanos sendo, desde então, a base jurídica, política e ética do sistema internacional dos direitos humanos.

As duas grandes guerras foram os primeiros momentos da história quando a indústria teve papel decisivo no resultado do conflito.

A guerra foi mecanizada. Muitos armamentos foram desenvolvidos nessa época: metralhadoras, tanques, aviões, gases tóxicos, submarinos, porta-aviões,

foguetes, mísseis, radares, bombas atômicas. Com a invenção da bomba atômica, a espécie humana era, pela primeira vez, capaz, tecnicamente, de uma auto-destruição.

A produção industrial usava o modelo criado por Henry Ford (EUA, 1863 - 1947), que foi engenheiro na Edison Illuminating Company e posteriormente fundou a Ford Motor Company em 1903, em Michigan - EUA. Com o lançamento do automóvel Ford Model T, em 1908, Ford revolucionou a indústria automobilística.

A logística para a distribuição das armas, de alimentos, combustíveis e pessoas durante os conflitos usavam, fundamentalmente, os transportes férreos e marítimos. O petróleo torna-se estratégico. E, sem uma comunicação eficiente, todo o sistema tornava-se fraco. O rádio, o telégrafo, usando códigos criptografados, eram usados para coordenar as ações. A logística passou a ser símbolo de modernidade.

Toda essa estrutura se refletia na vida da sociedade civil. Com a ampliação e os novos desenvolvimentos dos sistemas elétricos, de transporte, de telecomunicações, que se tornaram cada vez mais complexos, o cotidiano passou a ser mecanizado.

Nos grandes centros urbanos, o trabalho, o consumo, a organização das cidades, o ritmo da vida, a sociedade inteira passou a ser moldada pelo modelo de linha de produção industrial.

Rádio, cinema e a imprensa também passaram a funcionar como indústrias. Durante as guerras passaram a ser usados para mobilizar as populações e disseminar ideias políticas.

O fenômeno denominado *Indústria Cultural* pelos filósofos e sociólogos da *Escola de Frankfurt*, movimento originado no Instituto de Pesquisa Social da Universidade de Frankfurt, Alemanha, na década de 1920, refere-se à percepção de que a cultura também podia gerar lucro. Na chamada *Cultura de Massas*, os meios de comunicação vendem informação e entretenimento como mercadorias [35].

O indivíduo que vive na sociedade moderna industrial percebe o espaço, o tempo e a própria identidade de maneira diferente.

As pinturas do artista americano Edward Hopper (1882) traduzem a sensação de isolamento e silêncio, paradoxalmente, em meio à multidão e ao ritmo acelerado que caracterizavam os ambientes urbanos na época.

O movimento *surrealista*, iniciado em Paris, na década de 1920, tinha como objetivo, segundo André Breton, escritor francês líder do movimento e autor do Manifesto Surrealista: “*Resolver as condições ante-*



Figura 1: Nighthawks, Edward Hopper 1942

riormente contraditórias do sonho e da realidade em uma realidade absoluta, uma super-realidade, uma surrealidade.” [20].

Os artistas envolvidos no movimento eram influenciados pelas *teorias psicanalistas* desenvolvidas por Sigmund Freud (Áustria, 1856) e usavam o inconsciente como uma ferramenta na criação artística. Os surrealistas pretendiam resgatar a criatividade que, segundo eles, estava sendo sufocada pelo racionalismo, pelo domínio da lógica e da razão. Como a violência das guerras havia criado uma espécie de desilusão sobre os avanços técnicos/tecnológicos conseguidos com base nos conhecimentos científicos atingidos nas décadas anteriores, a proposta dos artistas era que, na arte surrealista, o abstrato, o acaso, o irreal, o humor, os sonhos se combinassem livremente. A ideia de “vida utilitária”, que dominava a sociedade industrial, deveria ser tensionada.

A *fotografia surrealista* foi uma experiência artística que transgrediu a noção de imagem fotográfica como “espelho do real” e fez da fotografia uma construção da mente, consciente e inconsciente, com profunda carga simbólica. Para construir essas imagens, os próprios recursos técnicos da fotografia eram usados como ferramentas para a criação de outras realidades.

Solarização, rayografia, invenções do artista visual Man Ray (EUA, 1890), dupla exposição, fotomontagem, enquadramentos incomuns, borrões, sombras, espelhos, distorções, desfoques, manipulações químicas eram algumas das técnicas utilizadas pelos artistas para sugerir instabilidade, irracionalidade, sensações de memória ou sonho, causando estranhamento, ambiguidade, sugerindo uma ruptura com a percepção racional.

Os artistas surrealistas queriam revelar o lado oculto da vida moderna: alienação, ansiedade e a sensação de perda da identidade.

Na primeira metade do século XX, aspectos técni-



Figura 2: Fotomontagem. Dora Maar, c. 1935

cos relacionados à captação de imagens pelas lentes das máquinas fotográficas tinham atingido importantes evoluções.

A empresa Kodak lançou, em 1925, o filme no formato 35mm que tornou-se o formato mais usado, desde então, tanto para fotografia quanto para cinema. Em 1927, a empresa alemã Leica, lança a primeira câmera, já utilizando os filmes de 35mm, verdadeiramente portátil, possibilitando a ampliação dos temas e ambientes a serem fotografados; as ruas dos centros urbanos e a guerra são dois exemplos de assuntos que passam a ser registrados pelas lentes das máquinas fotográficas.

Nesse período, o sistema óptico da máquina também alcançou níveis de excelência. Pesquisas realizadas pela empresa alemã Zeiss, fundada em 1846, transformaram a fotografia em ciência aplicada, desenvolvendo teorias sobre distância focal e abertura do obturador que permitiam a produção de lentes luminosas e precisas. A engenharia óptica desenvolvida também seria usada na indústria da guerra e na produção de microscópios e telescópios. O modelo Kise Exakta, lançada pela empresa alemã Ihagee, em 1936, foi a primeira máquina fotográfica, usando filme 35mm, produzida em escala industrial com o sistema SLR (Single Lens Reflex), permitindo que, através da máquina, o fotógrafo visualizasse, com precisão, a imagem que estava sendo captada.

A tecnologia para a transmissão de imagens fotográficas através dos cabos telegráficos, e depois cabos

telefônicos, utilizando o efeito fotovoltaico, foi desenvolvida ainda nas primeiras décadas do século XX. Em 1906, Arthur Korn, matemático, físico e inventor alemão, criou o primeiro aparelho de *varredura fotoelétrica* [30]. Em 1910, o sistema era utilizado para a transmissão de imagens entre Berlim, Paris e Londres.

O sistema de Korn, chamado de *telefotografia*, se baseia na propriedade da substância selênio ser *fotocodutora*, ou seja, a resistência da substância muda quando ele é iluminado: mais luz, menor resistência elétrica, mais corrente circula; menos luz, maior resistência, pouca corrente elétrica circula. A transformação da imagem em eletricidade ocorria expondo o negativo da imagem a ser transmitida, em um rolo de vidro que era iluminado. Após a luz atravessar o negativo, era refletida sobre uma placa revestida de selênio, ligada a fios condutores. A corrente elétrica gerada pela mudança de resistência do selênio variava junto com a intensidade da luz filtrada pelo negativo da imagem e era transmitida pelos fios a uma estação receptora. O aparelho receptor realizava a operação inversa: eletricidade - luz - imagem.

Em 1922, usando sistemas mais complexos, foi transmitida a primeira imagem fotográfica entre Europa e EUA. A célula de selênio foi um precursor dos sensores das câmaras digitais.

Foi ainda na primeira metade do século XX que surgiram as primeiras tentativas de entender as questões filosóficas decorrentes da produção e da transmissão de imagens através de máquinas. No ensaio “Pequena História da Fotografia” (1931) [6], o filósofo alemão Walter Benjamin (1892) mistura filosofia com história da técnica fotográfica, história da arte, estética e política. Ele apresenta a ideia de que a fotografia, com sua característica de reproduzibilidade, sua capacidade de congelar o instante, ampliar detalhes, registrar movimentos, preservar rostos e gestos, transforma profundamente a arte. Mais do que isso, Benjamin defende que a invenção da técnica fotográfica modifica nossa maneira de olhar, nossa percepção de tempo, a memória, a nossa relação com a realidade. A fotografia revela, ao olho humano comum, aspectos ocultos da realidade, um mundo invisível ao olhar, um mundo chamado por ele de *inconsciente óptico*, em paralelo ao *inconsciente psíquico* definido por Freud.

Também pertencente à Escola de Frankfurt e fortemente influenciado, além de Freud, pelas ideias de Georg W. F. Hegel (Alemanha, 1770), Karl Marx (Alemanha, 1818), Friedrich Nietzsche (Alemanha, 1844), Charles Baudelaire (França, 1821), Walter Benjamin, há 100 anos, foi um dos pioneiros na discussão so-

bre como as tecnologias de produção e reprodução de imagens transformam a própria experiência humana. Seu pensamento foi revolucionário pois questiona como a técnica influencia nossa percepção, como as imagens moldam a memória, como o capitalismo, ao submeter a cultura à industrialização, transformando-a em mercadoria, altera nosso olhar e nosso modo de viver o mundo. Benjamin desapareceu durante uma tentativa de fuga da Europa durante a segunda guerra, quando tinha 48 anos.

O termo *Zeitgeist*, de origem alemã, pode ser traduzido como “espírito do tempo” e refere-se aos valores, ideias, crenças e modos de vida predominantes em um certo período histórico. Embora não exista pensamento homogêneo em cada época e grupos sociais diferentes vivam experiências distintas, o termo serve para falar de um certo modo de pensar, sentir e perceber o mundo em cada época.

O desenvolvimento das Ciências Humanas na virada do século XIX para o século XX foi uma resposta à tentativa de entender essa nova sociedade moderna: industrial, urbana e de massas. Antropologia, Sociologia, Filosofia. Psicanálise, Linguística, História, Economia, Ciências Políticas; essas ciências surgem ou se institucionalizam nesse período, reformulando seus fundamentos para investigar essa nova realidade. A percepção de que o mundo tradicional estava desaparecendo, o fim da certeza de que a história da humanidade seguia um progresso inevitável, como acreditava o Iluminismo, e a descoberta de que o ser humano não é totalmente consciente e guiado pela razão, leva a um outro modelo intelectual: que a capacidade de compreensão humana depende da cultura, da história, da linguagem, de estruturas inconscientes e da posição e do ponto de vista do observador. Ou seja, o contexto importa decisivamente e o sujeito que observa nunca está totalmente externo ao fenômeno observado.

Relatividade é uma boa palavra para descrever essa nova faceta da investigação científica [31].

As Ciências Exatas, ao longo do século XX, também foram transformadas por essa nova maneira de pensar.

As teorias clássicas de Newton e o eletromagnetismo de Maxwell não tinham respostas para novas perguntas que surgiam. Experimentos envolvendo estrutura atômica, efeito fotovoltaico, velocidade da luz, radiação térmica desafiavam as teorias vigentes.

Se a luz é uma onda eletromagnética, em qual meio ela se propaga?

As descobertas do fenômeno da *radioatividade*, por H. Becquerel, em 1896, e dos elementos radioativos

polônio e rádio, em 1898, por Marie Curie (Polônia, 1867) e Pierre Curie (França, 1859), e a descoberta do elétron, por J.J. Thomson (Inglaterra, 1856), em 1897, mostravam que a estrutura atômica não é indivisível e estável, como se pensava, e a matéria podia se transformar e, de alguma maneira, contém energia.

Em 1900, Max Planck (Alemanha, 1858), tentando explicar teoricamente como objetos aquecidos emitem luz e calor, propôs pela primeira vez, e porque era a única maneira que os resultados encontrados fizessem sentido, que a energia não é contínua, e sim que era emitida em pequenos pacotes [39].

Em 1905, Albert Einstein (Alemanha, 1879) [12] publicou quatro trabalhos que se tornaram decisivos para a pesquisa científica a partir daquele momento. Nos artigos estavam determinados:

- fundamentos teóricos que explicam o efeito fotoelétrico e embasaria o conceito da dualidade onda-partícula da luz;
- modelo matemático para o movimento Browniano (movimento aleatório de partículas suspensas em um meio, como o pólen, por exemplo);
- teoria da relatividade especial: a velocidade da luz é constante e nenhum referencial é privilegiado;
- equivalência entre energia E e massa m :

$$E = mc^2,$$

onde c é a velocidade da luz.

Em 1915, Einstein publica a Teoria da Relatividade Geral, onde ele descreve a gravidade como uma curvatura do espaço-tempo causada pela massa dos corpos.

Esses trabalhos redefiniram luz, matéria, energia, massa, tempo e espaço.

A luz, agora, além de ser onda, passou também a ser considerada partícula.

A própria noção de *partícula* se altera.

Na teoria clássica de Newton, partícula é considerada um objeto de tamanho zero, que carrega energia e se localiza em um lugar preciso do espaço e que se movimenta com uma velocidade exata em qualquer momento. A *teoria das coordenadas*, definidas por Descartes, descreve muito bem esse modelo. Mas, a partir do trabalho de Einstein, partícula significa, dizendo de maneira simplificada, uma quantidade indivisível de energia, com uma certa quantidade de movimento. Esse modelo é chamado *partícula quântica*.

Nos anos seguintes, nomes como Ernest Rutherford (Nova Zelândia, 1871), Niels Bohr (Dinamarca, 1885), Louis de Broglie (França, 1892), Werner Heisenberg (Alemanha, 1901), Erwin Schrödinger (Áustria, 1887), Max Born (Alemanha, 1882), Paul Dirac (Inglaterra, 1902), desenvolveram um novo modelo para a estrutura atômica: os elétrons se localizam não em uma órbita, com trajetória precisa ao redor do núcleo do átomo, mas sim em uma “nuvem”, que representa uma probabilidade do elétron estar naquela região. Os elétrons também são partículas quânticas.

Segundo o *princípio da incerteza de Heisenberg* (1927), não é possível conhecer simultaneamente a posição e a quantidade de movimento do elétron, ou das partículas quânticas em geral. O que temos é uma probabilidade, um *estado quântico*, que é descrito por uma “função onda”, e apresenta várias possibilidades simultaneamente. Ao ser observado, ou seja, ao sistema ser perturbado pela tentativa de medição, a partícula assume um valor específico, o que é conhecido como o “colapso da função onda”. Assim, propriedades físicas deixam de ser absolutas e passam a depender da interação. O observador importa, a interação para a medição importa [22].

Os fundamentos teóricos matemáticos que estruturam esses novos conceitos e resultados foram estabelecidos por John von Neumann (Hungria, 1903), em seu livro “Mathematical Foundations of Quantum Mechanics” (Fundamentos Matemáticos da Mecânica Quântica, 1932) [51], onde ele usa operadores lineares auto adjuntos definidos em um espaço de Hilbert complexo para estabelecer uma das primeiras formulações axiomáticas da área. Von Neumann realizou pesquisa relevante em matemática, física, economia, biologia teórica, química, computação. Em 1926 e 1927, com bolsa da Fundação Rockefeller, trabalhou na Universidade de Gottingen, um dos principais locais de pesquisa na época, sob a supervisão do matemático David Hilbert (Alemanha, 1862) [34].

No século XIX, a pesquisa em matemática também tinha sido confrontada por resultados que abalaram ideias que, na época, eram consideradas apropriadas para descrever a realidade.

Em 1854, Georg Riemann (Alemanha, 1826) apresenta uma conferência em Gottingen, quando ele apresenta uma generalização da própria definição de *geometria*. Agora, não mais pensada a partir de pontos ou retas no espaço, mas como n -uplas que respeitam certas regras, sendo a principal delas a que envolve o cálculo de distância. Propriedades geométricas são determinadas exatamente pela maneira de calcular distância. Geometria passa a ser uma estru-

tura matemática. A *geometria riemanniana* foi uma ferramenta teórica decisiva para a elaboração da teoria da relatividade geral por Einstein.

Em artigos publicados a partir de 1874, Georg Cantor (Alemanha, 1845) criou a teoria dos conjuntos que se tornou fundamental para toda a estrutura da matemática a partir dali. Dos seus resultados surge a definição de vários tipos de infinitos, uns maiores do que outros, o que foi um verdadeiro choque.

David Hilbert, em 1900, no Congresso de Matemáticos em Paris, propôs a solução de 23 problemas com o objetivo de repensar a estrutura formal da matemática, procurando estabelecer axiomas fundamentais que sustentassem logicamente toda a teoria matemática já produzida e também a futura. Em uma espécie de *metamatemática*, a matemática olharia a própria matemática: teoria matemática sobre teoria matemática [42].

Em 1930, Kurt F. Gödel (Alemanha, 1906), com seu *Teorema da Incompletude* [19], mostrou que uma axiomatização completa da matemática era impossível, pois “todo sistema formal, consistente, suficientemente poderoso, não pode provar todas as suas verdades usando seus próprios axiomas”. Ou seja, o sistema formal da matemática não consegue alcançar toda a verdade que contém.

No início do século, a matemática, a física, a química e as ciências humanas passaram pelo momento de superar verdades consideradas absolutas até então, mas que não serviam mais a nova realidade que se impunha a partir das novas respostas que surgiam [31].

Seguindo a proposta do método científico feita por Galileu no século XVII, era o momento para novos questionamentos. O próprio Hilbert, em um dos seus problemas, apresenta uma pergunta sobre qual seria o limite da computação mecânica, o que é possível de ser calculado? Esses questionamentos estão próximos dos objetivos da *ciência da computação moderna*.

Alan Turing (Inglaterra, 1912), considerado o “pai” da computação, para responder à pergunta de Hilbert, criou, em seu artigo “On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem” (Sobre números contáveis e o problema de decisão) [47], de 1936, a chamada *máquina de Turing*, um modelo matemático abstrato capaz de, utilizando uma “cabeça” de leitura e escrita, manipular símbolos organizados em espaços individuais, sobre uma fita de comprimento infinito, de acordo com uma tabela de instruções simples. Essa tabela de instruções simples que devem ser realizadas pela máquina para encontrar uma resposta final é o que hoje chamamos de *al-*

goritmo. Turing desloca a ideia de que *calcular* é conseguir um número como resultado final para o processo de obtenção desse resultado, que, segundo ele, é precisamente seguir regras simbólicas. A resposta conseguida por Turing para a pergunta de Hilbert é que existem problemas matematicamente bem definidos que não podem ser calculados através de um algoritmo.

Assim, a lógica e a computação teriam limitações primordiais.

Também a pesquisa de Turing, e do seu orientador de doutorado Alonzo Church (EUA, 1903), estabelece a chamada *tese de Church-Turing*, na verdade uma hipótese: “tudo que pode ser calculado por uma lista de regras simples, pode ser calculado por uma máquina de Turing”. Essa ideia moldou a natureza da computação como a conhecemos hoje.

Durante a segunda guerra, Turing participou da equipe de cientistas que trabalharam para decifrar o código criptográfico utilizado nas comunicações entre os alemães e seus aliados. A experiência adquirida nesse período influenciou no desenvolvimento das primeiras máquinas de computação eletrônica depois da guerra.

Mesmo todo o reconhecimento recebido pela relevância do seu trabalho científico, e as implicações na vitória dos aliados na guerra, não impediu que Turing fosse condenado por homossexualidade e submetido a um tratamento chamado “castração química”. Turing morreu em 1954, por envenenamento por cianeto.

Outro projeto científico que teve influência decisiva no resultado da segunda guerra foi o projeto Manhattan [26], de onde resultou a construção das primeiras armas nucleares. J. Robert Oppenheimer (EUA, 1904), Enrico Fermi (Itália, 1901), Richard Feynman (EUA, 1918), Niels Bohr, J. von Neumann, entre outros, trabalharam no projeto que se tornou um grande esforço internacional. Muitos dos cientistas participantes nesse, e em outros projetos, eram refugiados europeus e asiáticos estabelecidos nos Estados Unidos, fugindo das guerras. Surge assim, um novo modelo de pesquisa, chamado *Big Science*, que moldaria a pesquisa científica nas décadas seguintes [16]. Com suporte financeiro estatal foram construídas grandes infraestruturas físicas e institucionais para a realização de pesquisas de longo prazo, em temas que passaram a determinar o poder e o desenvolvimento das nações. O desenvolvimento das ciências passa a ser estratégia de estado.

Ao final da segunda guerra, e da primeira metade do século XX, a ordem no mundo está transformada.

As próximas quatro décadas teriam como principais forças de poder duas grandes potências mundiais: Estados Unidos e União Soviética.

O mundo digital e a terceira revolução industrial

Dispositivos construídos para auxiliar na operação de cálculos matemáticos podem ser encontrados desde a antiguidade da história da humanidade.

Milênios separam os *quipus*, usados pelas antigas civilizações andinas (c. 2.000 a.c.) e os primeiros *ábacos*, inventados pelos povos sumérios (4.000 a.c.) na antiga Mesopotâmia, atual Iraque, e depois usados e aperfeiçoados pelos chineses, gregos, persas, romanos, japoneses, ao longo de séculos, da máquina considerada o *primeiro computador programável*, inventado por Charles Babbage (Inglaterra, 1791).

Em 1822, Babbage desenvolveu a *máquina de diferença*, totalmente mecânica, que usava engrenagens para calcular raízes de polinômios usando o *método das diferenças*. As ideias de Babbage evoluíram para o projeto de construção de uma máquina autônoma, chamada *máquina analítica*, que recebia instruções através de cartões perfurados, de modo semelhante às primeiras máquinas de tear automáticas do início da revolução industrial, eliminando a necessidade de ajuste manual da engrenagem para a realização dos cálculos. A matemática e escritora inglesa Ada Lovelace (1815) escreveu o primeiro algoritmo para ser processado por esta máquina. Lovelace é considerada a primeira programadora da história. O projeto para a construção da máquina, financiado pelo governo inglês, foi interrompido pelo seu alto custo.

Em 1931, o engenheiro elétrico e inventor americano Vannevar Bush (1890) desenvolveu o *analisador diferencial*, computador analógico mecânico que resolvia equações diferenciais através de integração. Bush participou do Projeto Manhattan e, em 1931, foi diretor da Escola de Engenharia do MIT - Massachusetts Institute of Technology, universidade de pesquisa privada, criada em 1861, pelo americano W. Barton Rogers (1804), com a proposta de promover a interação entre pesquisa científica e o desenvolvimento da indústria americana [11].

Um dos alunos de Vannevar no MIT foi Claude Shannon (EUA, 1916). Em sua dissertação de mestrado (1938), intitulada “A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits” (Uma análise simbólica de circuitos de relés e comutadores) [44], Shannon desenvolve uma teoria matemática para projetar circuitos elétricos.

Relé é, basicamente, um interruptor acionado por uma corrente elétrica.

A ideia de Shannon associa os dois estados do relé: aberto/desligado e fechado/ligado, aos numerais 0 e 1, respectivamente. E observa que a *álgebra booleana*, teoria matemática criada por George Boole (Inglaterra, 1815), no século anterior, também tratava de dois estados lógicos: 0/falso e 1/verdadeiro. Ou seja, o relé e a álgebra booleana têm a mesma estrutura lógica.

As correspondências propostas por Shannon foram:

0	circuito aberto
1	circuito fechado
e	ligação em série
ou	ligação em paralelo
não	inversor

Agora, era possível projetar matematicamente circuitos elétricos, tornando-os mais eficientes e com menos custo. A computação teorizada por Turing passa a ser fisicamente, e eletricamente, possível.

Ainda na segunda guerra, foram construídas máquinas que usavam válvulas termiônicas, com até 2.400 válvulas, com o objetivo de quebrar códigos criptografados e otimizar operações militares. A *válvula termiônica*, ou *tubo de vácuo*, foi inventada em 1904, pelo engenheiro elétrico e físico John A. Fleming (Inglaterra, 1849). A função da válvula é também controlar o fluxo de eletricidade e, ao contrário do relé, que possui partes elétricas e mecânicas, o funcionamento das válvulas é totalmente elétrico.

O computador ENIAC - Electronic Numerical Integrator and Computer (1945), construído a partir de um projeto financiado pelo Laboratório de Pesquisas do Exército Americano, era uma máquina de 30 toneladas, com mais de 17 mil válvulas. Foi a primeira máquina programável *Turing completa*, ou seja, capaz de simular qualquer máquina de Turing, o que significava ter a capacidade de executar algoritmos equivalentes à máquina universal de Turing.

A entrada e a saída de dados da máquina também era feita através de cartões perfurados. Os equipamentos que liam os cartões de entrada e gravavam os cartões de saída eram produzidos pela empresa americana IBM - International Business Machine Corporation, fundada em 1911. Esse tipo de equipamento havia sido usado no censo populacional dos EUA, em 1890, e era um aperfeiçoamento da máquina patenteada, em 1889, por Herman Hollerith (Alemanha/EUA, 1860), um dos fundadores da IBM.

Ao visitar o projeto, John von Neumann propôs uma nova estrutura para a organização do programa do aparelho. Antes, a programação era baseada na posição física dos cabos, interruptores e painéis de controle. No que agora é conhecido como *arquitetura de von Neumann*, as instruções (algoritmos) e os dados, ficam armazenados internamente na memória da máquina. Na época, a *memória do computador* ainda era um conceito no início do seu desenvolvimento.

Na segunda geração de computadores, iniciada em 1955, as válvulas que controlavam a corrente elétrica pelo aquecimento de um filamento, processo chamado de *emissão termiônica*, foram substituídas por *transistores*. Em 1947, o Bell Laboratories, laboratório de pesquisa da empresa AT&T, do conglomerado iniciado por Graham Bell [18], apresentou esse novo dispositivo que controlava o fluxo da corrente elétrica, como as válvulas, mas funcionavam utilizando as propriedades semicondutoras de materiais; inicialmente os materiais usados foram o silício e o germânio, mas, rapidamente, o silício passou a ser o material predominante.



Figura 3: Réplica do Primeiro Transistor, Bell Labs, 1947.

Em 1956, os pesquisadores americanos do Bell Labs: William Shockley (1910), John Bardeen (1908) e Walter Brattain (1902), receberam o prêmio Nobel de Física pela invenção. Foi o segundo Nobel recebido por pesquisas realizadas no Bell Labs.

A primeira produção industrial do transistor foi feita pela Western Electric, fábrica também participante do conglomerado Bell.

Em 1953, a empresa japonesa Totsuko, atual Sony Corporation, fundada em 1946, pelos japoneses Akio Morita (1921) e Masaru Ibuka (1908), que trabalharam

juntos em laboratório de pesquisa no exército imperial japonês, durante a segunda guerra, negociou com a AT&T e o Bell Labs a licença para a produção da peça no Japão. Embora a AT&T fosse uma empresa privada, em contrapartida pelo monopólio das telecomunicações nos Estados Unidos, deveria seguir orientações do governo do país em assuntos de interesse nacional. O Japão, depois da segunda guerra, esteve sob ocupação militar dos EUA até 1952. A Sony foi a primeira empresa a usar o transistor em aparelhos de rádio, televisores e gravadores [37].

No final da década, o primeiro *transistor planar* foi desenvolvido por Mohamed Atalla (Egito - EUA, 1924) e Daion Kahng (Korea - EUA, 1931), no Bell Labs. O material semicondutor utilizado foi o silício. No mesmo ano, a arquitetura do *MOSFET - metal-oxide-semiconductor field-effect transistor*, o primeiro transistor planar com a tecnologia MOS que usava um campo elétrico ao invés de corrente elétrica, permitia que seu tamanho físico fosse diminuindo cada vez mais e, conseqüentemente, o espaço que ocupavam também. Os primeiros *circuitos integrados*, onde os transistores são montados em uma única peça de silício, foram inventados pelos americanos Jack Kilby (1923), engenheiro elétrico, e Robert Noyce (1927), físico e empresário. Em 2000, os dois dividiram o prêmio Nobel de física, pela participação na invenção dos *chips*, dando início à história dos microcomputadores.

O primeiro comprador do novo dispositivo foi o exército americano à empresa Texas Instruments, onde Kilby trabalhava. Noyce participou da fundação da empresa Fairchild Semiconductors, em 1957, e da Intel Corporation, em 1968, ambas sediadas na Califórnia. Noyce tinha o apelido de “Mayor of Silicon Valley”. Em 1971, a Intel lança o primeiro microprocessador, em um único chip, com milhares de transistores.

Outras contribuições de Claude Shannon merecem destaque.

Enquanto trabalhava no Bell Labs, em 1948, publicou o artigo “A Mathematical Theory of Communication” (Uma teoria matemática da Comunicação) [45]. Logo no início do texto ele afirma: “*Frequentemente as mensagens possuem significado. (...) Esses aspectos semânticos da comunicação são irrelevantes para a engenharia. O aspecto importante é que a mensagem a ser enviada é uma selecionada de um conjunto de possíveis mensagens. O sistema deve ser projetado para operar para toda possível seleção, não apenas para a qual foi selecionada.*”

Esse modelo de sistema de comunicação tornou-se

o padrão das telecomunicações. Pela primeira vez a palavra *bit*, dígito binário, era usada para representar a escolha entre duas opções igualmente prováveis. Toda mensagem, independente do significado, pode ser representada por uma sequência de bits. Essa ideia é a base para toda *tecnologia digital*.

Em 1951, Shannon trabalhando para a CIA - Central Intelligence Agency, realizou pesquisas sobre criptografia. No artigo “Communication Theory of Secrecy System” (Teoria da comunicação do sistema secreto, 1949) [46], ele usa a sua teoria da informação para desenvolver uma análise matemática para definir a segurança de uma chave criptográfica. O AES - Advanced Encryption Standard, padrão de criptografia usado atualmente, considerado o mais seguro, baseia-se na teoria de Shannon.

Entre 1956 e 1978, Shannon foi professor no MIT, onde pesquisou sobre *inteligência artificial*, sendo um dos organizadores do evento “Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence”, em 1956, considerado o evento fundador dessa área de pesquisa.

As pesquisas feitas por Claude Shannon desempenharam papel basilar no desenvolvimento das tecnologias que hoje chamamos de *mundo digital*.

Outra contribuição das pesquisas feitas no Bell Labs foi o desenvolvimento da *tecnologia de transmissão de informação via satélite*.

Em 1945, o inventor e escritor inglês Arthur C. Clarke (1917) publicou o artigo “Extra-territorial relays - Can rocket stations give worldwide radio coverage?” (Relés extraterritoriais - Estações de foguetes podem fornecer cobertura mundial?), na revista *Wireless World*, dedicada a assuntos relacionados à comunicação sem fio. No texto, o autor, que possuía formação acadêmica em matemática e física, apresenta a ideia do uso das *órbitas estacionárias* em torno da Terra, descritas inicialmente por Herman Potocnik, engenheiro e militar austro-húngaro, em 1928, para a construção de um sistema de comunicações de alcance global [54].

Em 1957, foi lançado ao espaço o satélite Sputnik 1, o primeiro satélite artificial, pelo programa espacial da União Soviética. Durante três semanas, até a energia armazenada em uma bateria de prata e zinco terminar, o aparelho emitiu sinais de rádio à Terra. Em janeiro de 1958, o satélite saiu de órbita, caindo na Terra. Os dados obtidos com o monitoramento desses sinais deram origem à pesquisa que resultou no desenvolvimento do GPS - Global Positioning System [43].

O *programa espacial soviético* atingiu, além do lan-

çamento do Sputnik 1, outros grandes feitos: desenvolveu o primeiro míssil intercontinental; enviou o primeiro animal, a cachorra Laika, e os primeiros humanos, ao espaço: o astronauta russo Yuri Gagarin (1937) em 1961; a primeira mulher astronauta Valentina Tereshkova (URSS, 1937), em 1963. Em 1965, o astronauta Alexei Leonov (1934) foi o primeiro a caminhar no espaço. A primeira estação espacial, em 1971, o primeiro satélite a tocar a lua (1959) e os primeiros satélites a tocar Vênus, em 1970, e Marte, em 1971.

O espaço foi um dos cenários da disputa entre EUA e URSS, no período pós-guerra, conhecido como *Guerra Fria* [25].

Em 1958, um ano após o lançamento do Sputnik 1, o governo americano cria a NASA - National Aeronautic and Space Administration.

Em 1969, o *projeto Apollo*, programa da NASA, lança a nave Apollo 11, que levou à lua os primeiros humanos. Neil Armstrong e Buzz Aldrin pousaram na lua em 20 de julho de 1969. Três dias depois, a nave trouxe os astronautas de volta à Terra em segurança.

Imagens fotográficas foram feitas com máquinas da empresa sueca Hasselblad, adaptadas às condições específicas da viagem lunar. São das imagens, fotográficas ou não-fotográficas, mais importantes feitas até hoje.

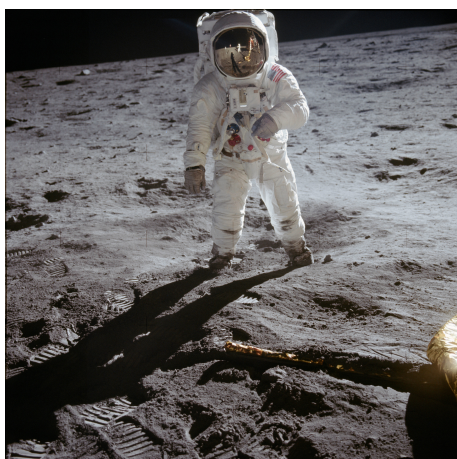


Figura 4: Edwin “Buzz” Aldrin on the moon’s surface Apollo 11 mission ©NASA.

Estima-se que a transmissão do pouso dos astronautas na lua foi assistida por mais de 600 milhões de espectadores ao redor do globo terrestre e é considerado o primeiro evento verdadeiramente com escala mundial da *era da comunicação de massa*, sendo também o auge de décadas de pesquisa para a transmissão de imagens em movimento.

Com o invento de Arthur Korn no início do sé-

culo, sabia-se que era possível transformar imagens em corrente elétrica. Em 1884, um aparelho chamado *disco de Nipkow*, um disco perfurado em espiral, foi inventado pelo alemão Paul Nipkow (1860). O invento fazia uma varredura da imagem em linhas. A palavra *televisão*, junção do prefixo grego *Tele* (Τῆλε - à distância) e da palavra latina *visio* (visão), foi usada pela primeira vez num artigo de 1900. Nas décadas seguintes, a tecnologia de captação e transmissão de imagem, inicialmente usando fios e depois usando ondas de rádio, foi se aperfeiçoando.

A primeira rede regular de transmissão de televisão foi a BBC - British Broadcasting Corporation, em Londres, fundada pelo governo da Grã-Bretanha, em 1922. Em 1936, o governo nazista alemão fez transmissões ao vivo da Olimpíada de Berlim, em salas públicas da capital alemã. Era o início das transmissões de eventos esportivos e também do uso político da TV. A empresa RCA - Radio Corporation of America, na Feira Mundial de Nova Iorque de 1939, apresentou ao público americano um sistema de televisão preto e branco totalmente eletrônico. Na década de 1950, a televisão tornou-se *produto de massa*.

A pesquisa para o uso de micro-ondas (ondas de frequência entre 300 MHz e 300 GHz) para a transmissão de dados foi acelerada durante as guerras. O desenvolvimento dos *radares* é um produto resultante dessas pesquisas. A transmissão via satélite também. Em 1962, o satélite Telstar, desenvolvido pela Bell Labs, foi lançado ao espaço. De propriedade da AT&T, era usado em associação com a NASA e os governos inglês e francês. As seis estações terrestres para se comunicar com o satélite localizavam-se nesses países e também no Canadá, Itália e Alemanha Ocidental. Com os satélites Telstar 1 e 2 foi possível realizar transmissões de TV e ligações de telefones com alcance global.

A ideia de Clark de que três satélites geoestacionários seriam suficientes para realizar a comunicação em todo o globo terrestre foi realizada com os satélites Syncom 1, 2 e 3, entre 1961 e 1964, pela NASA, sendo os satélites produzidos pela Hughes Aircraft Company, atual Boeing Satellite Development Center.

A energia necessária para que os circuitos elétricos dos satélites funcionassem era produzida através da luz solar captada por painéis solares e armazenados em baterias de níquel/cádmio. Os *painéis solares* também são um produto desenvolvido pelo Bell Labs. O mesmo processo de manipulação do silício, baseado nas suas propriedades semicondutoras e fotoelétricas, é a base que sustenta o funcionamento dos painéis solares.

A primeira célula solar de silício funcional, que poderia ser industrializada, foi produzida em 1954 e tinha 6% de eficiência. Os russos também desenvolveram a tecnologia dos painéis solares e o satélite Sputnik 3 (1958) já usava a luz como fonte de energia. Hoje, a taxa de eficiência dos painéis solares atinge uma média de 20%. As maiores fabricantes de painéis solares e de componentes usados na montagem dos painéis, atualmente, são empresas chinesas que são responsáveis por 80% da produção mundial de painéis solares.

Uma questão que surgiu logo nos primeiros anos após a construção dos computadores foi o fato de toda informação fornecida às máquinas serem dados que, de alguma forma, já haviam sido processados.

Com o objetivo de automatizar essa operação, em 1957, o engenheiro Russel Kirsch (EUA, 1929) e outros pesquisadores do NBS - National Bureau of Standard, agência de pesquisa do governo americano, desenvolveram o primeiro *scanner de imagem digital*. Em “Experiments in Processing Pictorial Information with a Digital Computer” (Experimentos no processamento de informações pictóricas com um computador digital), os autores apresentam o aparelho scanner, detalham seu funcionamento e apresentam um conjunto de rotinas para o computador processar esses dados. No texto, é usado o termo *picture elements*, que depois passou a ser chamado *pixel*, para designar a unidade digital de uma imagem. A primeira imagem escaneada, da filha de Hirsch, era formada por 30.976 pontos/pixels, distribuídos em uma matriz de 176 x 176 pixels. Também nesse artigo, estão sugeridas aplicações dessa nova técnica de discretização de uma imagem nas áreas de criminologia, localização geográfica, psicologia e neurologia [29].

Em 1968, o engenheiro elétrico Peter J. Noble (Inglaterra, 1940) publicou o artigo “Self-scanned silicon image detector arrays” (Matrizes de detectores de imagem de silício com varredura automática) [38]. Trabalhando como pesquisador na empresa inglesa Plessey Company, que buscava construir uma máquina para automatizar a leitura dos números em um cheque bancário, Noble desenvolveu o primeiro *sensor de imagem*. Na época, a proposta não foi comercializada por dificuldades técnicas. A ideia estava 20 anos à frente da capacidade de produção tecnológica.

Em 1969, os pesquisadores Willard Boyle (Canadá, 1924) e George Smith (EUA, 1930), trabalhando no Bell Labs, desenvolvem o sensor *CCD - Charge-Coupled Device*, uma espécie de chip que converte luz em carga elétrica [8]. O funcionamento do sensor CCD é semelhante ao do transistor MOS - metal-

oxide-semicondutor. Utilizado em equipamentos de alta precisão, como satélites e aparelhos médicos, esse tipo de sensor acumula a carga elétrica gerada pela luz em capacitores que enviam a carga “em fila” para um amplificador e, em seguida, são transformados em dados digitais. O sensor é uma matriz de *fotodiodos*, cada fotodiodo correspondendo a um pixel da imagem, que mede a quantidade de luz recebida e transforma em eletricidade, mas todo o processamento dos dados é feito em outros dispositivos.

Novamente, o homem constrói um dispositivo capaz de criar imagens usando a luz. Agora, não mais baseado no escurecimento de substâncias, como a prata, mas sim, utilizando o efeito fotoelétrico do silício. Boyle e Smith, em 2000, receberam o prêmio Nobel de Física pela invenção.

Mais de 20 anos depois, em 1993, foi desenvolvido o sensor *CMOS - Complementary MOS*. O artigo “CMOS Image Sensors: Electronic Camera on a chip”, de autoria de Eric R. Fossum (EUA, 1957) [14], traz a principal realização das pesquisas realizadas nos laboratórios da NASA na Caltech - California Institute of Technology. Nesse tipo de sensor, todas as etapas para a construção da imagem digital é feita em um único chip. O uso do dispositivo chamado *fotodiodo pinado*, patenteado por Nobukazu Teranishi (Japão, 1953), em 1981, foi fundamental para o funcionamento do sensor CMOS. Na década de 1990, o Japão era o principal fabricante mundial de máquinas fotográficas digitais, utilizando sensores CCD, e também das pesquisas em busca de uma melhor qualidade de imagem digital.

A possibilidade de criar imagens digitais usando apenas um chip foi o ponto de partida para a corrida pela minimização das câmaras fotográficas digitais, chegando às câmeras dos celulares de hoje. A Kodak saiu na frente dessa corrida, construindo, em 1975, o primeiro protótipo de câmera digital. Projetada pelo engenheiro Steven Sasson (EUA, 1950), a máquina pesava 3,6 kg, usava um sensor CCD, com resolução de 100x100 pixels, gravava a imagem captada em uma fita cassete. A visualização era feita em uma TV.

No mesmo ano, Bryce E. Bayer (EUA, 1929), também trabalhando na Kodak, inventou o padrão que ficou conhecido como *filtro Bayer*, que seria usado para registrar as cores das fotografias na grande maioria das câmeras digitais. Organizados em uma matriz, com cada entrada correspondente a um fotodiodo, filtros nas cores vermelho, verde, azul, na proporção 25%, 50% e 25%, respectivamente, funcionam como os filtros desenvolvidos na criação da fotografia



Figura 5: Primeira Câmera Digital, Kodak, 1975.

colorida analógica, 100 anos antes. Toda a ideia tendo como inspiração o funcionamento do olho humano.

A reconstrução da imagem a partir do processamento dessa matriz de dados que representam a intensidade da luz e a cor filtrada por cada diodo é feita por programas, ou algoritmos, no componente ISP - Image Signal Processor. Existem vários fabricantes deste tipo de dispositivo: Canon Inc. - DIGIC; Nikon Corporation - EXPEED; Sony Corporation - BIONZ; são alguns deles. As empresas fabricantes de câmeras digitais desenvolvem seus próprios algoritmos para processar os dados brutos coletados pelos sensores. Os algoritmos, usando vários tipos de interpolação e outros métodos, realizam ajustes não só nas cores, de certo modo suavizando “a grade” entre os pixels, mas também no contraste, nitidez, balanço de branco, e corrige possíveis pixels defeituosos. O que consideramos como qualidade de uma câmera digital, incluindo a de celulares, depende tanto da parte elétrica do sensor, quanto do algoritmo que processa os dados [21].

A enorme quantidade de dados necessários para produzir uma imagem digital logo mostrou-se um problema para seu armazenamento e também sua transmissão. Uma foto colorida de 1000x1000 pixels possui 1.000.000 pixels, e milhões de valores numéricos.

Contando com a incapacidade do olho humano perceber todos os detalhes de uma imagem, foram desenvolvidos os *algoritmos de compressão com perdas*.

Em 1974, Nasir Ahmed (Índia/USA, 1940), traba-

lhando na Kansas State University criou o algoritmo *DCT - Discrete Cosine Transform* [4] que, baseado na teoria das transformadas de Fourier, consegue identificar os padrões de variação da luz na imagem captada e retirar os dados que não descrevem as variações que são consideradas relevantes para a construção da imagem digital. Em 1992, foi divulgado o *padrão JPEG*, um formato universal para as imagens fotográficas digitais, que combina o algoritmo DCT, com conversão de cores e também outros tipos de algoritmos de compressão. O nome JPEG - Joint Photographic Experts Groups refere-se a um comitê originado de grupos de estudos da UIT - União Internacional de Telecomunicações, agência especializada da ONU, criada em 1957, responsável pelos padrões técnicos globais para redes, internet e tecnologia de informação.

As imagens digitais estavam prontas para participar da rede de comunicações global chamada *internet*.

A internet nasce como um sistema de comunicação entre computadores. No final da década de 1960, a ARPANET - Advanced Research Projects Agency Network, uma rede para comunicação militar, que conectava grupos de pesquisa em universidades, laboratórios, institutos contratados pelo Departamento de Defesa dos EUA, tinha o objetivo de compartilhar dados e softwares com rapidez e acessar computadores remotamente [1].

O envio dos dados ao longo da rede era feito “em pacotes”, tecnologia baseada nas *teorias matemáticas dos grafos e das filas*. Inicialmente, foram utilizados os cabos das companhias telefônicas para transportar os dados mas, na década seguinte, a empresa americana Corning Incorporated, fabricante de vidros, que produziu o vidro da lâmpada criada por Edison, usa esse material para desenvolver a *fibra óptica*, com capacidade de transmitir dados em alta velocidade. As pesquisas sobre a transmissão de dados através da luz, que haviam se iniciado ainda no século XIX, atingem resultados que tornam possível a aplicação na indústria da telecomunicação digital. Com a invenção do LASER - Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, teoria formulada por Einstein em 1917, os bits passam a ser transmitidos como pulsos de luz [3].

Na década de 1980, as fibras ópticas são instaladas em grande escala. O desenvolvimento dos *amplificadores ópticos* permitiu que os sinais fossem transmitidos em longas distâncias sem perder informação. O funcionamento do *EDFA - Erbium Doped Fiber Amplifier* se baseia na chamada *emissão estimulada*, que é o mesmo princípio físico do laser. No caso do EDFA,

as fibras de vidro são dopadas por átomos de érbio, elemento químico metálico pertencente ao grupo das *terras raras*. Atualmente, mais de 95% das transmissões de dados da internet são feitas através de cabos ópticos.

A internet que usamos no dia-a-dia é, na verdade, “apenas” uma parte dessa grande infraestrutura formada por cabos submarinos, fibras ópticas, roteadores, servidores, computadores e celulares conectados. A *www. - world wide web*, onde encontramos sites de empresas, redes sociais e outros sites, onipresentes no cotidiano contemporâneo, foi inventada, no final da década de 1980, por Tim Berners-Lee (Inglaterra, 1955), à época pesquisador do CERN - European Organization for Nuclear Research [7].

A invenção de uma *linguagem para estruturar páginas*, HTML ; do *endereço de um recurso*, *www. .com* ; do *protocolo para solicitar páginas*, HTTP, tornaram a internet acessível à sociedade em geral, não mais ficando restrita a centros de pesquisas e universidades com usuários com o conhecimento técnico necessário para lidar com comandos e códigos, e com conhecimento científico para entender, ou ao menos saber, quais teorias científicas estão envolvidas na invenção. O *link* funciona como o botão da máquina fotográfica portátil, lançada pela KODAK cerca de 100 anos antes, afastando o conhecimento científico dos usuários dos aparelhos.

Em 1992, fazendo testes com as novas ferramentas acrescentadas à *www.*, os pesquisadores do CERN publicaram a primeira fotografia digital na rede. Na imagem, aparece o grupo musical Les Horribles Cernettes, formado por funcionárias e colaboradoras do centro de pesquisa. O fotógrafo que registrou a imagem, Silvano de Genaro, também trabalhava no CERN. Ele utilizou um dos primeiros *programas de edição de imagens digitais* disponíveis para computadores pessoais, para manipular a imagem. Predominantemente textual, a *world wide web* começa a ter o aspecto visual no qual estamos imersos hoje.

Observar a evolução dos *computadores pessoais*, desde o lançamento, em 1971, do microprocessador Intel 4004, projetado inicialmente para funcionar em calculadoras, é acompanhar a formação de um novo tipo de organização empresarial que hoje faz parte da estrutura de poder global.

Inicialmente vendido como um kit de peças, o computador Altair 8800, fabricado pela MITS - Micro Instrumentation and Telemetry Systems, foi lançado em 1975, usava processador Intel 8800, não possuía teclado, vídeo, memória externa. Os comandos eram feitos através de chaves e luzes no painel frontal.



Figura 6: Capa da revista Popular Electronics, jan 1975

Bill Gates (EUA, 1955) e Paul Allen (EUA, 1953) fundaram a empresa Microsoft, em 1975, para comercializar o software BASIC interpreter, criado por eles para rodar no Altair, na tentativa de auxiliar no manuseio do aparelho.

Ainda na década de 1970, Steve Warwick (USA, 1950), Ronald Wayne (EUA, 1934) e Steve Jobs (EUA, 1955), fundaram a empresa Apple. O computador produzido pela empresa tinha teclado, vídeo colorido e armazenamento em disquete. A relação do usuário com os computadores se transforma.

A IBM lança, em 1980, o IBM - Personal Computer, com sistema operacional desenvolvido pela Microsoft. Em 1984, a Apple realizou o lançamento do computador Macintosh nos Estados Unidos, com um comercial de TV, dirigido pelo cineasta inglês Ridley Scott, transmitido durante o evento esportivo Super Bowl XVII. O vídeo, intitulado *1984*, refere-se ao livro, sobre um futuro distópico, escrito por George Orwell em 1949.

E, com chips cada vez menores, a portabilidade desses aparelhos também aconteceu durante as primeiras décadas da invenção.

Foram necessários menos de 20 anos entre o lançamento do primeiro iPhone, pela Apple em 2007, onde telefone, câmera, internet estavam integrados ao aparelho que, pela primeira vez trazia a *tela sensível ao toque*, do lançamento dos primeiros computadores portáteis: PowerBook, Apple - 1990, e ThinkPad, IBM - 1992; e do considerado primeiro smartphone, o Simon Personal Computer, IBM - 1994, aparelho pro-

jetado pela IBM, produzido pela Mitsubishi Electric, empresa membro do Mitsubishi Group, fundado no Japão em 1870, e distribuído nos EUA pela BellSouth Cellular Corp., empresa do Grupo Bell.

Em 1999, a empresa japonesa KYOCERA, lança o VP-210, visual phone, o primeiro aparelho celular com câmera fotográfica digital integrada. As imagens, de baixa resolução, eram enviadas, com baixa velocidade, através da rede digital de celulares japonesa.

Em 2000, a empresa japonesa Sharp Corporation, em parceria com a operadora J-phone, lançam o J-SH04, o primeiro celular associado a uma rede completa: fotografar, anexar à mensagem, enviar a outra pessoa. O serviço de envio de imagens por email Sha-Mail (Sha Mru, Picture Mail) estava integrado ao aparelho.

No último ano do século XX, o gesto que fazemos hoje “tirando selfie” segurando um celular, de modo automatizado, seria uma boa imagem para uma prévia das décadas seguintes.

Na virada do século XX para o século XXI, a rede de transmissão de celulares do Japão era uma das mais avançadas do mundo.

O desenvolvimento da tecnologia de funcionamento do sistema de antenas de ondas de rádio que estrutura a comunicação entre aparelhos de *telefonia móvel* também passou pelo Bell Labs. Na década de 1940, os engenheiros americanos William R. Young Jr. (1915) e Douglas H. Ring (1907), trabalhando no laboratório, propuseram como solução do problema da baixa capacidade e da alta interferência das transmissões de sinais telefônicos via ondas de rádio, trocando o uso de uma única antena de transmissão poderosa por uma rede de antenas distribuídas em subáreas, chamadas *células* (*cell*). Daí o nome de *telefonia celular* [2].

Nos anos 1960 e 1970, o problema da mobilidade foi resolvido com o novo conceito de *handoff*, que permite a transferência automática da mesma ligação entre as antenas. Vários cientistas participaram do desenvolvimento do AMPS - Advanced Mobile Phone System, o primeiro sistema celular moderno em grande escala, que se tornou o padrão da rede 1G nos EUA e no Japão, no início dos anos 1980. A rede 1G era analógica e transmitia apenas voz.

Nos anos 1990, a segunda geração da rede de telefonia celular 2G passa a ser digital, permitindo o envio de mensagens de texto. O sistema passa a operar em mais países. No Japão, a principal operadora do sistema lança o serviço i-mode, permitindo acesso a sites e serviços online, incluindo email. Foi nesse contexto que o primeiro celular com câmera conec-

tado à rede surgiu, em 2000. Apenas dois anos antes, em 1997, o engenheiro americano Philippe Kahn, usou três aparelhos: uma câmera digital, um celular e um computador portátil, conectados por cabos, para enviar, para familiares e amigos, uma foto da filha recém nascida, desenvolvendo um “novo conceito”:

produzir uma imagem e compartilhar essa mesma imagem instantaneamente para milhares de pessoas.

A *indústria da comunicação/informação*, iniciada com a invenção do telégrafo, passa a transmitir texto, som e imagens transformados em 0s e 1s, alcançando todo o globo. Nessa nova globalização, todas as relações precisaram ser readaptadas às novas tecnologias. Inclusive a indústria em geral. Durante a segunda metade do século XX e das duas primeiras décadas do século XXI, primeiro o computador e, em seguida, o celular e a internet, são incorporados à produção, comercialização e distribuição de mercadorias e serviços. A *terceira revolução industrial* também é chamada de *a era da informação* [9], [10].

Além das equipes trabalhando em grandes laboratórios, a cooperação internacional e a interdisciplinaridade também caracterizam a estrutura de Big Science das pesquisas científicas na época.

Além do CERN, outros projetos são bons exemplos de internacionalização e de interdisciplinaridade. O *Projeto Genoma Humano*, iniciado na década de 1990, apresenta seus primeiros resultados em 2000. Os dados finais estão disponíveis em bancos de dados na internet. Em 1988, a ONU cria o IPCC - *Intergovernmental Panel on Climate Change*, para compilar e analisar os dados científicos relacionados às mudanças climáticas. A *Estação Espacial Internacional*, montada entre 1998 e 2011, envolveu agências espaciais dos Estados Unidos, Rússia, países europeus, Japão e Canadá. A astronomia também se beneficiou das colaborações. Os projetos *Hubble*, *James Webb*, *Event Horizon Telescope* (buraco negro), *LEGO/VIRGO* (ondas gravitacionais) continuam produzindo dados para novas pesquisas.

O Bell Labs talvez seja o maior exemplo dessa estrutura montada para a produção de ciências [18]. Num mesmo lugar trabalhavam cientistas teóricos: matemáticos, físicos, químicos; cientistas experimentais e engenheiros. Os projetos que buscavam aplicações na indústria nasciam de discussões entre a teoria e a prática.

Na década de 1980, uma grande transformação atinge o laboratório. A razão dessas mudanças também é sintomática de uma nova etapa da história das ciências. Com o fim do monopólio da empresa

AT&T sobre o sistema telefônico dos Estados Unidos, a fonte dos recursos que mantinham as pesquisas deixou de existir. O Bell Labs é dividido e passa a fazer parte de novas corporações. Atualmente, parte dele existe como o Nokia Bell Labs.

O desenvolvimento das novas tecnologias, ironicamente com a fundamental participação do Bell Labs, cria espaço para outras empresas participarem desse novo mercado de tecnologia digital.

Foi uma época quando as teorias que defendem a livre concorrência como um caminho para o desenvolvimento, o que hoje é chamado de *neoliberalismo econômico*, ganharam força.

A Microsoft foi uma das beneficiárias do fim do monopólio das telecomunicações. O ambiente competitivo no setor foi propício à expansão do uso dos computadores pessoais, de modems e também de softwares, produto vendido pela empresa.

Yahoo (1994), Amazon (1994), Google (1998) surgem nesse momento de diversificação da infraestrutura das telecomunicações e da expansão da internet comercial.

No Brasil, o sistema de telecomunicações e a pesquisa na área se iniciam em 1965, com a criação da *Embratel - Empresa Brasileira de Telecomunicações*, pelo governo federal do país, com o objetivo de integrar as comunicações de longa distância em todo o território nacional. Em 1972, é criado o *Sistema Nacional de Telecomunicações - Telebrás*. O CPqD - *Centro de Pesquisa Padre Roberto Landell de Moura* foi fundado em 1976. O padre brasileiro Roberto Landell (1961) inventou aparelhos para a transmissão de som. O objetivo do centro de pesquisa era desenvolver novos produtos que proporcionassem ao país a independência em relação às tecnologias estrangeiras. Durante toda a década de 1980, apesar da profunda instabilidade financeira que o país atravessou, as pesquisas continuaram e, em 1985-86 são lançados os satélites Brasilsat 1 e 2, criando um canal autônomo para o sistema brasileiro de telecomunicações por satélites. Nos dez anos seguintes, outros satélites foram lançados, para comunicação e pesquisa oceanográfica, atmosférica e florestal, e foi implementado o Serviço de Internet Comercial.

O sistema Telebrás foi privatizado em 1998. As empresas Brasil Telecom, Vivo/Telefônica, Claro, TIM são algumas das empresas que adquiriram, gradualmente, fatias do mercado atendido pela empresa estatal, todas predominantemente controladas por capital estrangeiro. Antes da privatização, o CPqD foi transformado em uma fundação de direito privado, passando a desenvolver soluções tecnológicas volta-

das ao mercado e a governos.

Em 1990, com o fim da União Soviética e, consequentemente, da Guerra Fria, os Estados Unidos surgem como a única grande potência com influência global. Nas décadas seguintes, o mundo vive uma fase de um único poder global: o *mundo unipolar*.

No livro “O fim da história e o último homem”, escrito em 1992 [15], o cientista político e escritor americano Francis Fukuyama apresenta a tese de que, com a vitória sobre o fascismo e sobre o comunismo, a democracia liberal americana, associada à economia de mercado, havia vencido a competição ideológica e econômica global, tornando o modelo ideológico mais legítimo. A teoria de Fukuyama continua sendo objeto de discussão, inclusive com ajustes apresentados pelo próprio autor.

Ao longo dos mais de 40 anos de Guerra Fria [25], e nas décadas seguintes, o poder e a influência americana eram, e são, diferentes do colonialismo clássico, baseado no controle direto do território. Alianças tecnológicas, influência econômica, bases militares e instituições internacionais caracterizam um tipo sistemático de influência e interferência.

Liderados pelos Estados Unidos, o FMI - Fundo Monetário Internacional (1944), o sistema monetário de Bretton Woods (1945), o Plano Marshall (1948), os acordos da Jamaica (1976), o acordo de Plaza (1985), o consenso de Washington (1989) criaram regras econômicas com consequências que afetaram a maioria das economias globais. Em 1975, numa espécie de nova versão da Conferência de Berlim (1884), foi criado o *Grupo dos 7 - G7*, pelo presidente francês Valéry d'Estaing, com os países mais industrializados do mundo: Alemanha, Canadá, EUA, França, Itália, Japão e Reino Unido. A Rússia foi convidada para participar do grupo em 1997, formando o G8, e foi expulsa do grupo em 2014, quando os conflitos políticos começaram na Ucrânia.

O nome Guerra Fria esconde a realidade dos conflitos armados que aconteceram em todo o mundo na época, onde a razão principal para o conflito era a disputa pelo controle político, ideológico e econômico dos países e regiões. A guerra do Vietnã, a guerra às drogas, as ditaduras militares na América Latina, as guerras civis na África e o Apartheid na África do Sul são exemplos de conflitos aparentemente distintos, mas que podem ser pensados como eventos que fazem parte das disputas geopolíticas desse período.

No século XXI, as justificativas para as intervenções precisaram ser ajustadas, mas a busca por controle é a mesma.

A fotografia e a história das ciências brasileiras se encontram na pesquisa de César Lattes (Brasil, 1924) [50].

Graduado pela USP - Universidade de São Paulo, instituição fundada em 1934, foi aluno de Giuseppe Occhialini (Itália, 1907) e de Gleb Wataghin (Ucrânia/Itália, 1899), que participaram da fundação do departamento de física da universidade.

Em 1946, Lattes viaja à Inglaterra para participar do grupo de pesquisa liderado por Cecil Powell (Inglaterra, 1903), que investigava física nuclear na Universidade de Bristol. Beppo Occhialini também era membro da equipe. Nos dois anos seguintes, utilizando um tipo de detector de partículas chamado emulsão nuclear, a pesquisa realizada pela equipe comprovou, experimentalmente, a existência do pion, ou π -meson, uma partícula subatômica, prevista teoricamente por Hideki Yukawa (Japão, 1907), em 1935.

Uma *emulsão nuclear* é um tipo de filme fotográfico que registra a trajetória individual de partículas ionizantes. A ideia inicial de usar emulsões fotográficas para a pesquisa científica sobre partículas aparece num artigo do japonês Kinoshita Suekiti, em 1910. Nas décadas de 1920 e 1930, a equipe liderada por Powell, junto à empresa inglesa Ilford, fabricante de materiais fotográficos, fundada em 1879, aperfeiçoaram a técnica, aumentando a densidade da prata, tornando os rastros deixados pelas partículas mais visíveis.

Na década de 1940, Lattes e os químicos da empresa desenvolveram a *full-toned emulsion*, com camadas mais espessas, maior concentração de prata e o acréscimo do elemento boro. Com a emulsão melhorada, Lattes fez a exposição das placas aos raios cósmicos no Observatório de Chacaltaya, na Bolívia, a 5.000 metros de altitude. Em 1947, pela primeira vez, foi possível observar o processo completo de decaimento do pion, como previsto na teoria. Os artigos "Processes involving charged mesons" (processos envolvendo mesos carregados), de Lattes, Occhialini, Powell e H. Muirhead, e "Observations on the tracks of slow mesons in photographic emulsion" (Observações sobre as trajetórias de mésons lentos em emulsão fotográfica), de Lattes, Occhialini e Powell, foram publicados no mesmo ano, na revista Nature, volumes 159 e 160, respectivamente [32] [33].

Em 1948, nos laboratórios da Universidade de Berkeley - EUA, Lattes, em colaboração com Eugene Gardner (EUA, 1901), realizou experiências comprovando que era possível produzir a partícula em laboratório. O artigo "Artificial Production of Mesons" (Produção artificial de mésons), de autoria dos

dois pesquisadores, foi publicado em 1948, na revista Science volume 107 [17].

Em 1949, Hideki Yukawa recebeu o prêmio Nobel de Física, por seu trabalho teórico em forças nucleares que previram a existência dos mésons. Em 1950, Cecil Powell recebeu o Nobel de Física "*pelo seu desenvolvimento do método fotográfico para o estudo dos processos nucleares e por suas descobertas relativas aos mésons, realizados por esse método*".

Em 1987, Lattes recebeu o TWAS Prize, concedido pela Academia Mundial de Ciências.

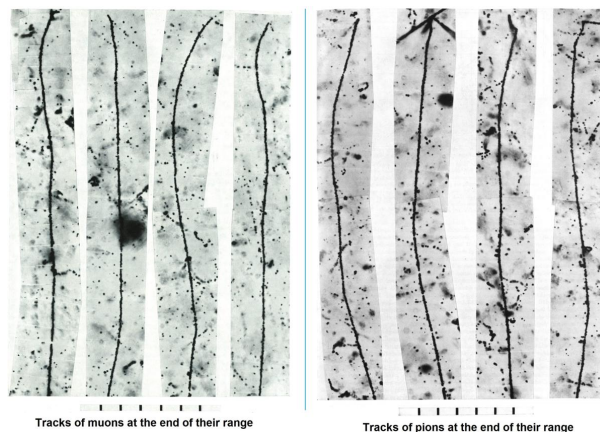


Figura 7: Imagens publicadas no artigo "Processes involving charged mesons", 1947

A análise das placas, onde as reações químicas deixavam trilhos de grãos, era feita em microscópios especiais e poderia durar dias. Alguns anos depois, os detectores de partículas passaram a ser eletrônicos. Atualmente, são usados sensores digitais e a análise dos dados tem a participação de inteligência artificial.

Em 1949, de volta ao Brasil, Lattes foi um dos fundadores do CBPF - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e liderou a organização da pesquisa em física experimental no Instituto de Física da Unicamp, onde trabalhou até a aposentadoria em 1986, quando recebeu os títulos de doutor honoris causa e professor emérito pela universidade.

Muitos contribuíram para a evolução das ciências no século XX. Não só nos laboratórios industriais, militares e em grandes universidades, onde toda a infraestrutura necessária para que hipóteses e ideias fossem testadas, resultados fossem analisados e conclusões fossem estabelecidas, como propôs Galileu, 400 anos antes. Mesmo na falta de grandes recursos, cada contribuição teórica, cada pequeno aperfeiçoamento de técnicas e instrumentos, cada incentivo e orientação feito a jovens estudantes, despertando o interesse pela pesquisa, representa um passo no caminho

que a humanidade percorre na busca pela produção de conhecimento sobre a natureza, sobre o universo e sobre nós mesmos.

Mas, tão importante quanto valorizar todas as contribuições, é identificar o sistema que organiza a produção e a distribuição dos recursos para fazer ciência.

No século XXI, em plena era da informação, temos ferramentas para investigar essa questão.

O século XXI

Ainda não existe consenso entre os historiadores sobre qual evento marca a transição entre os séculos XX e XXI.

A queda do muro de Berlim (1989) e a dissolução da União Soviética (1991); a criação da www. (1993) e a revolução digital; os atentados do 11 de setembro (2001); a entrada da China na OMC - Organização Mundial do Comércio (2001) são os principais candidatos para servir de marco dessa época de transição que é gradual, mas tem ritmo intenso.

Mas não há dúvidas de que a tecnologia que mais representa esse momento de verdadeira revolução, que estamos atravessando, é a *inteligência artificial*.

Ainda na década de 1960, o programa ELIZA (1966), criado por Joseph Weizenbaum (Alemanha/EUA, 1923) [53], no MIT, simulava conversas escritas, permitindo a interação do programa com seres humanos. O termo *efeito Eliza* nomeava a crença que muitas pessoas desenvolveram, incluindo pessoas que trabalhavam no projeto, de que o programa era inteligente e tinha sentimentos humanos.

A popularidade desse tipo de programa cresceu com o Deep Blue, desenvolvido pela IBM, quando, em 1997, este derrotou o campeão de xadrez Garry Kasparov (URSS, 1963). Corretores ortográficos, filtros de spam, mecanismos de busca e sistemas de recomendação na internet são sistemas inteligentes, desenvolvidos por empresas como Google e Amazon, que se tornaram comuns nos anos 2000. As assistentes virtuais Siri (Apple), Alexa (Amazon) e Google Assistant (Google), lançadas nos anos 2010, permitiram a interação com a máquina em linguagem cotidiana.

Em 2022, a primeira versão do ChatGPT, acessível ao público em geral, foi disponibilizada pela empresa americana OpenAI (2015). Segundo o ChatGPT 5.5 [40], versão do programa/sistema que consulto ao escrever esse texto:

O ChatGPT é um sistema de inteligência artificial conversacional baseado em um grande modelo de linguagem (LLM), desenvolvido pela OpenAI.

Principais características:

- Compreensão e geração de linguagem natural: conversa em linguagem humana sobre diversos temas.
- Aprendizado a partir de grandes volumes de texto: foi treinado em enormes conjuntos de dados para identificar padrões linguísticos.
- Modelo probabilístico: prevê a sequência de palavras mais provável para produzir respostas coerentes.
- Capacidade multimodal (em algumas versões): pode trabalhar com texto, imagens e outros tipos de dados.
- Generalista: responde perguntas, resume textos, traduz idiomas, auxilia em programação, redação e estudo.
- Não possui consciência: não pensa nem compreende o mundo como um ser humano; processa informações matematicamente.
- Baseado em redes neurais profundas: utiliza a arquitetura Transformer, introduzida em 2017.

Em uma frase: O ChatGPT é uma inteligência artificial que utiliza matemática, estatística e redes neurais para compreender e gerar linguagem humana de forma conversacional.”

A arquitetura para a aprendizagem profunda *Transformer* foi proposta por uma equipe de pesquisadores da Google Research, no artigo “Attention is all you need” (Atenção é tudo o que você precisa) [49], publicado em 2017. Hoje é o modelo de processamento para o ChatGPT (2022, OpenAI), Claude (2023, Anthropic), Gemini (2023, Google), DeepSeek R1 (2025, DeepSeek). A empresa chinesa DeepSeek desenvolveu a arquitetura *Mixture of Experts*, uma evolução da arquitetura Transformer, e disponibilizou o peso dos seus modelos, permitindo que pesquisadores e empresas adaptem o modelo aos seus interesses.

A ideia central da arquitetura Transformer é a observação simultânea de todas as palavras de um texto e a determinação de uma ordem de relevância de cada palavra na estrutura desse texto. Esse processo é chamado *self-attention*. Cada palavra é um vetor, a comparação entre as palavras é feita usando operações vetoriais.

Essa estrutura de trabalho permitia o uso dos *GPU* - *Graphics Processor Units*, chips com capacidade de

processar muitos cálculos em paralelo, desenvolvidos originalmente para trabalhar com gráficos e imagens em 3D. A capacidade de processamento dos chips e a grande quantidade de dados digitais acumulados na internet, em smartphones e nas redes sociais, foram decisivos para treinar os modelos de forma eficiente.

Hoje testemunhamos a disputa para a produção dos GPUs mais avançados.

A empresa holandesa ASML - Advanced Semiconductor Materials Lithography (1984) é a única fábrica do mundo que produz as *máquinas de litografia* mais avançadas usadas na fabricação de chips. Utiliza óptica alemã, laser americano, chips japoneses e engenharia holandesa. Empresas como TSMC - Taiwan Semiconductor Manufacturing Co (Taiwan, 1987), Samsung Electronics (Coreia do Sul) e Intel usam as máquinas da ASML para produzir os chips mais avançados. NVIDIA (1993), AMD - Advanced Micro Devices (1969) e Intel, empresas americanas, são líderes no projeto de novos chips.

Na China, empresas como Huawei (1987), projetos, SMIC - Semiconductor Manufacturing Int Coop. (2000), fabricação, e SMEE - Shanghai Micro Electronics Equipments (2002), máquinas de litografia, formam uma estrutura de produção semelhante à americana e seus parceiros, mas ainda numa etapa de desenvolvimento anterior.

A arquitetura Transformer trata os dados de modo algébrico e geométrico.

No século XVII, Newton usou o cálculo para descrever o movimento dos corpos. No século XIX, Maxwell usou equações diferenciais para explicar as ondas eletromagnéticas. No século XX, Einstein usou a geometria diferencial para descrever a gravidade. No século XXI, para o funcionamento das IAs, conceitos matemáticos são mais do que uma ferramenta, são os próprios elementos que as estruturam. A matemática descreve e modela padrões de informação, a linguagem é pensada como objeto matemático. Palavras e frases são tratadas como vetores e matrizes, pontos de um espaço matemático, com milhares e milhões de dimensões, manipulados usando transformações lineares. A estatística determina padrões que embasam a probabilidade de possíveis próximas palavras. O cálculo diferencial determina quando, quanto e para qual direção os parâmetros devem ser ajustados para produzir a melhor resposta, reduzindo os erros.

É possível fazer um paralelo entre o mundo quântico e o espaço algébrico/geométrico com grandes dimensões das IA: ambos não podem ser vistos, mas podem ser descritos e manipulados matematicamente.

Atualmente, existe uma teoria de que dentro desse espaço matemático com até milhões de dimensões, os dados reais, que poderíamos descrever como os textos possíveis, as imagens possíveis, os sons possíveis, se organizam dentro do espaço maior em uma espécie de subespaço. Essa organização é feita pelas redes neurais durante a fase de aprendizado e esse processo não acontece totalmente de maneira controlada. Esse subespaço de dimensão menor é chamado *espaço latente*. Alguns pesquisadores acreditam que esse espaço possui uma estrutura matemática de variedade diferencial, como formas geométricas surgidas automaticamente durante o treinamento. Os modelos modernos de IA podem ser pensados como um novo objeto para a pesquisa científica [5].

Uma pergunta fundamental nesse contexto é se a inteligência é fundamentalmente matemática. Estruturas matemáticas complexas são suficientes para descrever o fenômeno que chamamos de inteligência humana? Ou consciência, subjetividade e significados também são componentes fundamentais? O futuro dirá.

Os avanços tecnológicos são uma prova concreta de que a pesquisa científica funciona. Mas, num nível mais profundo, ainda não sabemos porque funciona. Muitas perguntas continuam sem respostas, inclusive nas pesquisas em física quântica e no funcionamento das IA. Alguns defendem que mais importantes do que partículas são as relações entre elas. *Informação* já é considerada como uma possível componente da própria realidade. As perguntas continuam, as hipóteses também.

Imagens também são informações.

Em 2021, os modelos de IA passaram a gerar imagens a partir de textos. Informação escrita transformada em informação visual.

O funcionamento do *Diffusion Model* [23], usado pelos principais sistemas geradores de imagens, é baseado na habilidade de transformar *ruído*, informação nova distribuída de modo controlado, em uma imagem organizada. O sistema aprende a desfazer o ruído. Assim, as novas imagens são geradas. A partir do ruído puro dos espaços matematicamente estruturados dos dados, o modelo usa probabilidade, envolvendo equações estocásticas, para, em etapas, retirar as informações que não correspondem aos textos/vetores.

Numa jornada que começou com os desenhos feitos nas paredes das cavernas, dos murais feitos em paredes de templos religiosos, em madeira, em papel, em telas de tecido, até chegar a fotografia, produção

de imagens usando luz e baseada em propriedades físicas e químicas de materiais, primeiro a prata e depois o silício, chegamos à produção de imagens a partir de algoritmos, usando probabilidade.

Agora, vemos as *imagens algorítmicas* em telas, telas que também são frutos de décadas de pesquisas e desenvolvimento tecnológicos, junto com “cópias digitais” de todos os outros tipos de imagens produzidas anteriormente. O mundo digital, fortalecido pelo poder das inteligências artificiais, tem essa característica de tornar homogêneo as diferenças que, em certo sentido, definem o que coisas/objetos são.

O que são as imagens algorítmicas? Qual o vínculo delas com a realidade?

Walter Benjamin disse, há 100 anos, que a nova técnica de produção de imagens com máquinas mudaria o nosso olhar e a nossa maneira de viver o mundo. De fato, a fotografia funcionou como uma ferramenta, como intermediária, para acessar o mundo, inclusive o mundo quântico. E as imagens algorítmicas, qual papel desempenhará na interpretação e na construção da realidade nas próximas décadas?

Na escolha dos ajustes para que os parâmetros alcancem as melhores respostas, quem decide o que é a “melhor resposta”?



Figura 8: 24HRS in Photos, obra do artista Erik Kessels (2011)

Na obra instalação do artista holandês Erik Kessels (1966), centenas de milhares de fotografias impressas inundam os espaços da galeria. São impressões de parte das imagens postadas em um único site de uma rede social, durante 24 horas. Uma pergunta que a obra sugere é “o que significa isso?”. Gerar inquietação e questionamentos é um dos objetivos da Arte.

No livro “O meio é a mensagem”, do filósofo Marshall McLuhan (Canadá, 1911), publicado em 1964 [36], o autor afirma que a mensagem enviada é secundária, o importante é o meio, a tecnologia. Um pensamento que se alinha à teoria da informação de Shannon. Embora estivesse considerando os

meios de comunicação de massa, rádio e TV, populares à época, podemos hoje atualizar essa afirmação dizendo que o que importa não é o que é publicado nas redes sociais a cada dia, mas que bilhões de pessoas passaram a viver em uma realidade construída no mundo digital através de computadores e smartphones, mediada por algoritmos.

Mas, o ponto mais relevante talvez seja a falsa sensação de que ao usarmos as tecnologias, nossa ação constrói essa realidade. Quando, na verdade, a mediação feita por regras, que nem sabemos quais são, é que controla os rumos dessa realidade.

Os usos da IA ainda estão sendo descobertos, os limites estão sendo testados.

Concluimos o primeiro quarto do século XXI e, nesse novo momento de grandes mudanças na história do desenvolvimento da sociedade humana, mais uma vez, o controle dos recursos naturais e tecnológicos serão decisivos. Parece ser um bom momento para tentativas de novas colonizações. E, considerando a afirmação “*The atomic age is ending. One age of deterrence, the atomic age, is ending, and a new era of deterrence built on A.I. is set to begin.*” (A era atômica está terminando. Uma era de dissuasão, a era atômica, está chegando ao fim, e uma nova era de dissuasão baseada em IA está prestes a começar.), contida no documento “The technological republic” (A república tecnológica) [55], publicado na página oficial da empresa Palantir, especialista em tecnologias de IA aplicadas a assuntos militares, em uma rede social, em abril de 2026, colonização não só de terras, raras ou não, mas, principalmente de olhos e mentes.

Conclusão

Em 1962, o físico e filósofo da ciência Thomas Kuhn (EUA, 1922) publicou o livro *The Structure of Scientific Revolutions* (A estrutura das revoluções científicas) [31], onde ele usa o termo *mudança de paradigmas* para caracterizar as transformações que ocorrem na pesquisa científica em relação às ideias, conceitos, métodos, e aos critérios do que é considerado relevante. Mesmo em contextos mais amplos do que as ciências, a palavra paradigma, de modelo ou padrão, passou a significar uma lente, uma maneira de ver o mundo, próximo do significado de *Zeitgeist*.

A instabilidade que vemos hoje, nesse mundo contemporâneo, pode ser pensado como sendo um processo de mudança de paradigmas.

O professor Wang Wen, da Universidade de Renmin, Pequim, China, e outros autores, no livro “*Profound Changes Unseen in Centuries*” (Mudanças pro-

fundas não vistas em séculos) [52], publicado em 2020, afirmam que estamos atravessando por transformações em estruturas estabelecidas nos últimos 500 anos: o fim da era da exploração colonial, iniciado no século XVI; uma revolução tecnológica/técnica, com a invenção da inteligência artificial, comparada à invenção das máquinas, no século XVII; a crise no sistema político liberal, iniciado na revolução francesa no século XVIII; a crise na estrutura acadêmica universitária, com a divisão e especialização do conhecimento, estabelecido no século XIX, que não consegue resolver problemas cada vez mais interdisciplinares; o deslocamento da distribuição do poder internacional, centrado no atlântico norte desde o início do século XX, para uma estrutura multipolar, com a influência do pacífico leste se intensificando.

Sem dúvida, investigar e interpretar a realidade hoje, na busca pela produção de conhecimento, passa por considerar essas mudanças. Como indivíduos do século XXI, refletir sobre como o conhecimento científico, e as novas tecnologias desenvolvidas a partir dele, estão sendo usados para moldar o futuro, significa questionar sobre como todo esse conhecimento está sendo usado para interferir nesse amplo e profundo processo de mudança. Sobre quem, de fato, se beneficia de todo esse desenvolvimento, um desenvolvimento que, como acompanhamos ao longo desse texto, surge a partir do contexto histórico dos últimos 500 anos, pelo menos.

Há 100 anos, a descoberta e, depois, a matematização do mundo quântico, nos fizeram chegar até aqui. Estão a caminho grandes avanços em robótica, tecnologia médica, baterias, energias renováveis, com a inteligência artificial participando das pesquisas, inclusive em pesquisas nas ciências teóricas, como a matemática.

E o gesto de fazer fotos nos nossos celulares e compartilhá-las nas redes sociais, além de alimentar narcisismos, com a quantificação do reconhecimento social, também mediada por algoritmos, o que significa? As fotos dos quadros feitas ao final das aulas, servem para aprender Cálculo ou Geometria Analítica? E a I.A., como poderá ajudar no aprendizado dessas disciplinas? Qual conhecimento científico será necessário no futuro, um futuro que parece estar mais próximo do que pensávamos?

Além das ciências e seus produtos, outros aspectos da vida humana, individual e social, deverão participar na construção de um futuro mais equilibrado. Fora das telas, a existência e o mundo concreto, as emoções e a história também são realidades.

Turing, no seu artigo “Computing Machinery and

Intelligence” (Máquinas de calcular e inteligência), de 1950 [48], inicia perguntando: *Computadores podem pensar?*, e, diante da dificuldade de definir o que é máquina e o que é pensar, logo propõe uma mudança na pergunta: *“Máquinas podem imitar o pensamento?”*. É o *jogo da imitação*. Talvez o maior risco que corremos como humanidade é acreditar nessa imitação e nós mesmos passarmos a imitar.

A arte, incluindo a fotografia, e a educação são antidotos a essa espécie de adoecimento.

Segundo Vilém Flusser (Tchecoslováquia, 1920), filósofo da fotografia, em seu livro “O universo das imagens técnicas: Elogio da Superficialidade” (1985) [13], no mundo informatizado, existe um novo significado para *“liberdade: ... a possibilidade única e insubstituível que tenho de lançar informações novas contra a estúpida entropia lá fora, possibilidade essa que realizo com os outros.”*. Para Flusser, não existe liberdade sem diálogo.

O patrono da educação brasileira, Paulo Freire (1921) [41], em sua obra defende que o papel da educação é a de *“ser o agente que habilita as pessoas a interpretar o mundo, a serem capazes de pensar por si mesmos”*. Que no futuro próximo, a educação encontre este destino.

Em maio de 2026, foi anunciado que o Jiuzhang-4, computador quântico baseada em fótons, desenvolvido pela University of Science and Technology of China, em pesquisa liderada por Pan Jianwei e Lu Chaoyang, e projetado para realizar tarefas matemáticas e simulações complexas, realizou em 25 microssegundos o cálculo que um computador binário levaria 10^{42} anos [56].

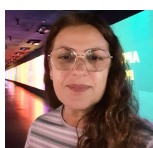
A História segue. E os artistas e os cientistas, seguidores de Galileu, continuarão a dizer *“E pur si muove.”*.

Bibliografia

- [1] ABBATE, Janet. *Inventing the Internet*. Cambridge: MIT Press, 1999.
- [2] AGAR, Jon. *Constant Touch: A Global History of the Mobile Phone*. Cambridge: Icon Books, 2003.
- [3] AGRAWAL, Govind P. *Fiber-Optic Communication Systems*. 4. ed. Hoboken: Wiley, 2012.
- [4] AHMED, Nasir; NATARAJAN, T.; RAO, K. R. Discrete Cosine Transform. *IEEE Transactions on Computers*, v. C-23, n. 1, p. 90–93, 1974.
- [5] ARVANITIDIS, Georgios; HAUBERG, Søren; SCHÖLKOPF, Bernhard. Geometrically enriched latent spaces. In: *Proceedings of the 24th International Conference on Artificial Intelligence and*

- Statistics (AISTATS)*. PMLR, 2021. p. 631–639. Disponível em: <https://proceedings.mlr.press/v130/arvanitidis21a.html>. Acesso em: 27 jun. 2026.
- [6] BENJAMIN, Walter. *A obra de arte na era de sua reprodutibilidade técnica*. Porto Alegre: L&PM, 2017.
- [7] BERNERS-LEE, Tim. *Weaving the Web: The Original Design and Ultimate Destiny of the World Wide Web*. New York: HarperCollins, 1999.
- [8] BOYLE, William S.; SMITH, George E. Charge Coupled Semiconductor Devices. *Bell System Technical Journal*, v. 49, n. 4, p. 587–593, 1970.
- [9] BRIGGS, Asa; BURKE, Peter. *Uma história social da mídia: de Gutenberg à Internet*. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.
- [10] CASTELLS, Manuel. *A sociedade em rede*. São Paulo: Paz e Terra, 1999.
- [11] CERUZZI, Paul E. *A History of Modern Computing*. 2. ed. Cambridge: MIT Press, 2003.
- [12] EINSTEIN, Albert. *The Collected Papers of Albert Einstein*. Princeton: Princeton University Press. Diversos volumes.
- [13] FLUSSER, Vilém. *O universo das imagens técnicas: elogio da superficialidade*. São Paulo: Annablume, 2008.
- [14] FOSSUM, Eric R. CMOS Image Sensors: Electronic Camera-on-a-Chip. *IEEE Transactions on Electron Devices*, v. 44, n. 10, p. 1689–1698, 1997.
- [15] FUKUYAMA, Francis. *O fim da história e o último homem*. Rio de Janeiro: Rocco, 1992.
- [16] GALISON, Peter; HEVLY, Bruce (org.). *Big Science: The Growth of Large-Scale Research*. Stanford: Stanford University Press, 1992.
- [17] GARDNER, E.; LATTES, C. M. G. Production of mesons by the 184-inch Berkeley cyclotron. *Science*, Washington, v. 107, n. 2776, p. 270–271, 1948.
- [18] GERTNER, Jon. *The Idea Factory: Bell Labs and the Great Age of American Innovation*. New York: Penguin Press, 2012.
- [19] GÖDEL, Kurt. *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*. 1930. Dissertação (Doutorado em Matemática) – Universidade de Viena, Viena, 1930.
- [20] GOMBRICH, Ernst H. *A história da arte*. 16. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [21] GONZALEZ, Rafael C.; WOODS, Richard E. *Digital Image Processing*. 4. ed. New York: Pearson, 2018.
- [22] HEISENBERG, Werner. *Physics and Philosophy: The Revolution in Modern Science*. New York: Harper & Row, 1958.
- [23] HO, Jonathan; JAIN, Ajay; ABBEEL, Pieter. Denoising diffusion probabilistic models. *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, v. 33, 2020. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2006.11239>. Acesso em: 27 jun. 2026.
- [24] HOBSBAWM, Eric. *A era dos impérios: 1875–1914*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1988.
- [25] HOBSBAWM, Eric. *Era dos extremos: o breve século XX (1914–1991)*. 2. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 1995.
- [26] HODGES, Andrew. *Alan Turing: The Enigma*. Princeton: Princeton University Press, 2014.
- [27] JAMMER, Max. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [28] KEEGAN, John. *The First World War*. London: Hutchinson, 1998.
- [29] KIRSCH, R. A.; CAHN, L.; RAY, L. C.; URBAN, G. H. Experiments in processing pictorial information with a digital computer. In: *Proceedings of the Eastern Joint Computer Conference*. New York: Institute of Radio Engineers, 1958.
- [30] KORN, Arthur. Über ein Apparat zur Herstellung von elektrischen Fernphotographien. *Elektronische Zeitschrift*, v. 23, 1902.
- [31] KUHN, Thomas S. *A estrutura das revoluções científicas*. 13. ed. São Paulo: Perspectiva, 2017.
- [32] LATTES, César; OCCHIALINI, Giuseppe; POWELL, Cecil F.; MUIRHEAD, Hugh. Processes Involving Charged Mesons. *Nature*, London, v. 159, p. 694–697, 1947.
- [33] LATTES, César; OCCHIALINI, Giuseppe; POWELL, Cecil F. Observations on the Tracks of Slow Mesons in Photographic Emulsions. *Nature*, v. 160, p. 486–492, 1947.
- [34] MACRAE, Norman. *John von Neumann: The Scientific Genius Who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence and Much More*. New York: Pantheon Books, 1992.
- [35] MARCUSE, Herbert. *O homem unidimensional: estudos da ideologia da sociedade industrial avançada*. Tradução de Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: Zahar, 1967.
- [36] McLUHAN, Marshall. *Os meios de comunicação como extensões do homem*. São Paulo: Cultrix, 2007. (Obra originalmente publicada em 1964.)
- [37] MORITA, Akio. *Made in Japan*. New York: Dutton, 1986.

- [38] NOBLE, Peter J. W. Self-scanned silicon image detector arrays. *IEEE Transactions on Electron Devices*, v. 15, n. 4, p. 202–209, abr. 1968. DOI: <https://doi.org/10.1109/T-ED.1968.16167>.
- [39] PLANCK, Max. Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, v. 2, p. 237–245, 1900. Disponível em: <https://cds.cern.ch/record/262745>. Acesso em: 27 jun. 2026.
- [40] OPENAI. *ChatGPT* (versão GPT-5.5). San Francisco: OpenAI, 2026. Disponível em: <https://chat.openai.com/>. Acesso em: 27 jun. 2026.
- [41] FREIRE, Paulo. *Pedagogia do oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.
- [42] REID, Constance. *Hilbert*. New York: Springer-Verlag, 1970.
- [43] RIORDAN, Michael; HODDESON, Lillian. *Crystal Fire: The Birth of the Information Age*. New York: W. W. Norton, 1997.
- [44] SHANNON, Claude Elwood. A symbolic analysis of relay and switching circuits. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, New York, v. 57, n. 12, p. 713–723, Dec. 1938.
- [45] SHANNON, Claude Elwood. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, New York, v. 27, n. 3, p. 379–423, July 1948.
- [46] SHANNON, Claude Elwood. Communication theory of secrecy systems. *The Bell System Technical Journal*, New York, v. 28, n. 4, p. 656–715, Oct. 1949.
- [47] TURING, Alan Mathison. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, London, ser. 2, v. 42, n. 1, p. 230–265, 1936.
- [48] TURING, Alan Mathison. Computing Machinery and Intelligence. *Mind*, Oxford, v. 59, n. 236, p. 433–460, Oct. 1950.
- [49] VASWANI, Ashish et al. Attention Is All You Need. In: *Advances in Neural Information Processing Systems*, 31., 2017. Red Hook: Curran Associates, 2017. p. 5998–6008. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1706.03762>. Acesso em: 27 jun. 2026.
- [50] VIEIRA, Cássius; VIDEIRA, Antonio Augusto Passos. *César Lattes: a descoberta do méson π e a física brasileira*. Rio de Janeiro: Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2012.
- [51] VON NEUMANN, John. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1955.
- [52] WANG, Wen; JIA, Jinjing; LIU, Yushu; WANG, Peng. *Profound Changes Unseen in Centuries: An Overview of China*. Singapore: Springer Nature, 2022.
- [53] WEIZENBAUM, Joseph. ELIZA—a computer program for the study of natural language communication between man and machine. *Communications of the ACM*, v. 9, n. 1, p. 36–45, 1966. Disponível em: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/365153.365168>. Acesso em: 27 jun. 2026.
- [54] ARTHUR C. CLARKE FOUNDATION. Arthur C. Clarke Biography. Disponível em: <https://clarkefoundation.org/arthur-c-clarke-biography/>. Acesso em: 27 jun. 2026.
- [55] PALANTIR Technologies. The Technological Republic, in brief. X (antigo Twitter), 18 abr. 2026. Disponível em: <https://x.com/PalantirTech/status/2045574398573453312>. Acesso em: 27 jun. 2026.
- [56] CHINESE ACADEMY OF SCIENCES. China's Jiuzhang 4.0 takes optical quantum computing to new heights. CAS Newsroom, 18 maio 2026. Disponível em: https://english.cas.cn/newsroom/cas-in-media/202605/t20260518_1159539.shtml. Acesso em: 27 jun. 2026.



Ana Pinheiro é professora do Departamento de Matemática da UFBA, doutora pela UFRJ, na área de Geometria Diferencial. Atualmente, cursa o Mestrado em Artes Visuais, na Escola de Belas Artes da UFBA, onde estuda Fotografia. Quer muito entender o mundo, e desconfia que quem não sabe História, não sabe nada.

MEMÓRIA

Maria Augusta de Araújo Moreno: Uma Professora Modernizadora

Diogo Franco Rios

Como temos acompanhado, a Revista de Matemática Hipátia tem trazido uma seção com textos que valorizam a MEMÓRIA de personagens que atuaram no Instituto de Matemática e Estatística da UFBA e, neste número, apresentaremos um artigo a respeito da professora aposentada Maria Augusta de Araújo Moreno, que esteve ligada ao Instituto desde sua formação inicial em Matemática. A parte principal do conteúdo que trazemos aqui foi produzida a partir da textualização de trechos de uma entrevista concedida pela própria professora e de entrevistas com ex-alunos do Colégio de Aplicação que a mencionaram muito frequentemente como uma professora marcante e modernizadora ao rememorem os anos que estudaram na Instituição¹.

Maria Augusta de Araújo Moreno nasceu em 1934, em Ilhéus, mudando-se com a família para Salvador poucos meses após seu nascimento. Coursou o primário nas Escolas Ana Neri e Getúlio Vargas, o curso ginasial no Ginásio Estadual Severino Vieira, e o científico no Colégio Estadual da Bahia. Coursou Matemática na UFBA de 1954 a 1957. Segundo ela mesma conta, logo após sua graduação foi chamada a atuar no Colégio de Aplicação da Universidade da Bahia (CA)², inicialmente substituindo a professora de Ma-



Figura 1: Professora Maria Augusta de Araújo Moreno. Arquivo pessoal da Prof.^a Maria Augusta.

temática do 3º ano científico³ que estava grávida e, posteriormente, como professora titular da disciplina.

¹As entrevistas mencionadas ocorreram por circunstância da produção da tese: 'Memórias de Ex-Alunos do Colégio de Aplicação da Universidade da Bahia Sobre o Ensino da Matemática Moderna: a construção de uma instituição modernizadora' (RIOS, 2012).

²O Colégio teve outras cinco formas oficiais de identificação: Ginásio Anexo à Faculdade de Filosofia da Universidade da Bahia; Colégio de Aplicação da Faculdade de Filosofia da Universidade da Bahia; Colégio de Aplicação da Universidade da Bahia; Colégio de Aplicação Reitor Miguel Calmon e, por último, Centro Pedagógico

Reitor Miguel Calmon, já vinculado à Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, após a Reforma Universitária, em 1968 (RIOS, 2012). Utilizaremos aqui Colégio de Aplicação ou somente Aplicação.

³Atualmente, 3º ano do Ensino Médio, devido às mudanças na legislação educacional brasileira. No período anterior a 1971 o Ensino Secundário era dividido em Ensino Ginásial e Colegial. No CA essa última etapa da formação secundária possuía uma turma de Estudos Clássicos e outra de Científico.

Em 1959 foi para a Faculdade de Filosofia da Universidade de São Paulo, onde estudou topologia sob orientação de Omar Catunda e cursou disciplinas do mestrado com bolsa de pós-graduação. Ao retornar para a Bahia tornou-se professora assistente do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Física (IMF)⁴, em 1961, onde ofereceu seminários, como o de Topologia Geral, em 1961.1, e disciplinas no Ensino Superior, como a de Topologia, em 1964.

No entanto, em função de uma lógica de distribuição do trabalho entre os professores do IMF, sob a liderança da professora Martha Maria de Souza Dantas, ela passa a integrar a equipe do Instituto comprometida com o projeto de modernização da Matemática no Ensino Secundário, ligado ao Centro de Ensino de Ciências da Bahia (CECIBA) e ao Colégio de Aplicação, juntamente com as colegas, Eliana Costa Nogueira, Norma Coelho Araújo, Neide Clotilde de Pinho e Souza, Eunice Guimarães (DIAS, 2002; MENEZES, 2015).

É nesse contexto de atuação, mais especificamente ligada ao Colégio de Aplicação, que a professora Maria Augusta destaca suas memórias como docente da UFBA e também é apontada nas memórias dos estudantes como uma referência de dedicação ao ensino da Matemática, celebrada como uma agente de modernização dos padrões de ensino da época.

Trazer essas memórias é uma tarefa importante na compreensão do papel do Instituto de Matemática e Estatística (IME) e de seus professores no processo de qualificação do Ensino Secundário na Bahia a partir da década de 1960, merecendo ser revisitadas e integrar a historiografia da Educação Matemática no estado, tendo o IME como uma instância de difusão e implementação de padrões modernos que internacionalmente vinham se estabelecendo naqueles anos.

O Colégio de Aplicação começou a funcionar em 1949 e tinha entre seus objetivos principais servir de espaço de prática didática para os estudantes dos cursos de licenciaturas da UFBA, tendo se tornado também um campo de experimentações educacionais, como costuma ser lembrado por vários de seus ex-alunos. O Colégio teve suas atividades encerradas em 1976 quando os professores da UFBA que ali atuaram foram realocados em outras atividades voltadas para o Ensino Superior em diferentes Unidades da Universidade, como conta a professora Maria Augusta:

[...] *quando o Colégio de Aplicação acabou eu fui chamada pra ir pro Instituto de Matemática, porque todos professores tomaram seus destinos, então, pela minha capacidade, pela habilidade, ao invés de ir para a Educação, porque eu poderia ter ido pra Educação, eu fui para o Instituto de Matemática* (MORENO, 2012, p. 8).

Com o retorno às atividades no Ensino Superior, a professora Maria Augusta seguiu ministrando disciplinas do Departamento de Matemática para os cursos da Universidade até abril de 1989, quando se aposentou como professora adjunta (MORENO, 2026).

A seguir, são apresentadas textualizações de trechos de entrevistas concedidas pela professora Maria Augusta e alguns de seus ex-alunos a respeito da atuação dela no Colégio de Aplicação, que foram organizadas por tópicos.

A chegada no Colégio de Aplicação

Eu tinha sido aluna do Curso de Matemática na UFBA na época da professora Martha Dantas, que coordenava o grupo que tinha uma proposta de criação de materiais ligados à Matemática Moderna. Depois de ter me formado em Matemática, ou melhor, antes mesmo de me formar, eu já comecei ensinar no Colégio de Aplicação. Porque eu substituí a professora Nilza (da Rocha Medrado dos Santos) no terceiro ano de Colégio porque ela estava grávida e precisava de um professor substituto. Dos alunos que estavam estagiando eu fui selecionada para começar a ensinar. Aí fiquei no Colégio de Aplicação até... — eu não lembro bem até que ano que eu fiquei — mas sempre, sempre... é... até os últimos anos do Colégio.

Como eu disse, eu comecei ensinar no terceiro ano, quer dizer, dei continuidade às minhas aulas de prática, não é?! Aquela parte ligada ao Curso de Matemática, depois estive dois anos fora, em São Paulo, na Faculdade de Filosofia com o professor Edson Faraco que ensinava Topologia, só depois voltei para a Bahia.

Martha Dantas me acompanhou a vida toda, na Faculdade, na indicação de cursos, foi ela quem me indicou e tudo, ela me... animou pra ir pro Colégio de Aplicação. Também me indicava para dar aulas particulares, então, os resultados que chegavam para ela eram tão bons que ela só fazia me indicar, só dizia assim: “pra ensinar só Maria Augusta”. Eu que já no meu tempo de ginásio dava banca, atuei dando muita aula particular. A pessoa me procurava e dizia assim: “olha, Dona Martha disse que se a senhora não ensinar, nin-

⁴O Instituto de Matemática e Física vai ser desmembrado em institutos distintos com a Reforma Universitária, em 1968. Em 2023 passa a se chamar Instituto de Matemática e Estatística, como o mencionaremos ao longo deste trabalho.

guém vai dar jeito, se a senhora não der jeito, ninguém dará mais jeito”.

A minha relação com ela era a melhor possível, porque eu sempre tive Martha em alto conceito, um conceito muito alto da pessoa dela e da professora... e, reciprocamente, ela sempre me prestigiou, como eu lhe disse, me indicando para diversas atividades não só particulares, como também para a Faculdade, ela me prestigiava muito, muito bom, muito bom entrosamento.

Martha foi a vários colóquios, sabe?! Portugal, França... Ela viu o que estava mudando na Matemática, como é que estavam mudando e... ela se pautou nisso e, juntamente com o professor Catunda, começaram a elaborar o material relativo à Matemática Moderna.

Sobre minha atuação como professora... eu era muito rigorosa, eu tinha uma... uma característica que eu apliquei no Colégio de Aplicação e no João Florêncio Gomes⁵, eu fazia teste todo santo dia, hoje eu dava a matéria, hoje eu dava o assunto, amanhã eu já aplicava o teste. Todo santo dia. São... eram perguntas bem simples, imediatas, se eu hoje falava sobre translação, explicava translação, dava exemplo, amanhã eu já anotava no teste, ditava, dividia a turma em quatro, sem que eles pudessem ver o que o outro estava fazendo, sem eles poderem pescar, né?! E... eles ficavam a princípio meio tensos porque achavam que não ia dar tempo, mas foi um sucesso porque quando chegava na hora da prova era só rever e porque todo santo dia eles tinham obrigação de ler a matéria.

Sobre a Matemática Moderna no Colégio de Aplicação

A experiência de estar lançando uma coisa nova no seio da Matemática, no meio do Colégio, isso pra mim era empolgante, né?!

Na parte de álgebra, veja só, juntamente com o livro que foi dado pelo professor Catunda, com a orientação do professor Catunda, por falta de materiais prontos, comecei usando no Colégio de Aplicação um livro que era uma tradução de um livro Americano⁶.

Isso aconteceu antes da experiência de professor Catunda e Martha Dantas, foi aí que eu introduzi esse

⁵Outra escola de Salvador em que a professora Maria Augusta atuou.

⁶A professora se refere ao livro de Matemática que foi produzido no âmbito de projetos que propunham reformar o ensino médio norte-americano, School Mathematics Study Group (MSG). Além da Matemática, também circularam no Brasil livros desses projetos ligados a outras disciplinas, como Física, Biologia e Química (OLIVEIRA FILHO, 2009).

livro, foi um achado pra mim, ele era coisa bem moderna, bem moderna mesmo e não tinha essa conotação de livro de 1º ano de ginásio, 1º ano de colégio 1º, 2º e 3º anos, não. Ele tinha todos os assuntos, e eu abordava os assuntos de acordo com a nossa programação.

Sei que era vermelho, o livro, e era grosso, a encadernação era muito boa. O grupo de alunos que eu introduzi esse livro, esse grupo foi um dos primeiros, pena que eu não tenha ninguém assim pra quem eu possa apelar à memória. Ele foi usado nos primeiros anos que eu ensinei no Colégio de Aplicação, não é dizer que no Colégio de Aplicação não existia, estou lembrando de quando eu estreei no Colégio de Aplicação com esses materiais, já depois que voltei para a Bahia.

Não era aquilo tradicional, era uma coisa que eu — não nego, não, — eu tinha que estudar, amadurecer... mas, eu amadurecia com eles, porque não havia tempo pra amadurecer. O Catunda, que era o pai da ideia, ele... como é que se diz, orientava essa proposta.

Esse livro quando nós estudávamos, por exemplo, a função, ele fazia pela translação, pela homotetia, mas “não dava os nomes aos bois”, então, eu carreguei comigo essas noções. Era um livro cujo autor eu não me lembro agora, mas ele estudava, primeiramente, por exemplo, a função identidade, depois ele fazia homotetia, era a questão linear, depois ele fazia translação, então, você tinha a função de 1º grau. A função de 2º grau, ele começava pela função, a função era a fundamental, era “ x^2 ”, depois ele fazia homotetia, quer dizer, ele fazia uma parábola... depois fazia homotetia de acordo com o coeficiente de A, ela abria ou ela reduzia, levando em conta o sinal. Depois uma translação, quer dizer, ela deixa de ter o vértice na origem e passa a ter para cima ou para baixo. Uma translação. Depois... dada uma função qualquer, como você trabalhar na função do 2º grau para descobrir que homotetia e que translações foram feitas da fundamental pra se chegar aqui...

Esse livro abriu muito a minha cabeça e abriu também a dos alunos. Depois é que eu fui casar que era uma homotetia, era uma translação, e a simetria também. Até simetria também. Tal função é obtida dessa forma... fazendo isso, fazendo homotetia, fazendo translação, depois simetria em relação ao eixo ou em relação ao eixo das ordenadas ou em relação a uma determinada reta... e aí pronto.

Simultaneamente a esse trabalho, existia lá em Porto Alegre uma professora que tava fazendo umas experiências, uma maneira de introduzir os assuntos, mas ela não teve o sucesso esperado por falta de estímulo para os professores...



Figura 2: Prof.^ª Maria Augusta na sala de aula do CA. Arquivo pessoal da Prof.^ª Maria Augusta.

Mas, esse livro, uma espécie de uma tradução de um livro americano, era... era uma coisa! Eu ficava encantada, a maneira não só como expunha, como ele introduzia a matéria, mas também a maneira como ele cobrava. Eu me lembro perfeitamente da maneira como ele cobrava, ele parecia... — porque americano tem essa... — parecia que era muito fácil no começo, depois que você ia ver o perigo que era a maneira como ele cobrava.

A experiência do uso desse material americano foi interrompida no Colégio porque veio o projeto de Martha, aí me convidaram para aplicar e eu aceitei. Era uma proposta diferente: começa que ela introduzia essas transformações basicamente na geometria; depois é que nós começamos a introduzir essas transformações na aula, na função e tudo mais, entendeu? Nesse livro que eu lhe falei antes não citava explicitamente as Transformações, não.

Depois de um tempo, como eu me dava muito com uma das autoras da equipe desse outro livro⁷, cuja autoria é de Omar Catunda, começaram a querer experimentar esses materiais, esse livro, e me confiaram. Então, eu acompanhei uma turma com essa apostila que era, vamos dizer assim, feita grosso modo. Nós trabalhávamos, eu e ela trabalhávamos, vamos dizer assim, à tarde e à noite e, de manhã, já estávamos aplicando. Foi muito assim “em cima da perna”, então, levei aqueles meninos até o terceiro ano. Lá eu tinha muita autonomia para agir, não tinha problema, não.

Eu estava comentando com a Neide (Clotilde Pinho e Souza), que na época em que esses materiais estavam sendo feitos eu já estava simultaneamente aplicando

no Colégio de Aplicação.

Apesar deles não terem o material suficiente, porque se tratava de uma experiência, então você não encontrava aquela matéria em lugar nenhum, era só mesmo aqueles apontamentos feitos, folhas assim... que eu entregava pra eles e aquele material é que eles estudavam, que eles aplicavam. Depois é que foi feito uma apostila “grosseira” e depois é que eles fizeram um livro de editora, editora tal da Universidade. Mas foi feito inicialmente assim.

Antes dos livros tinha muito material mimeografado. Era assim: hoje eu sabia que eu ia dar certo assunto, aí na noite anterior eu preparava o stencil e no dia seguinte, enquanto eu estava dando aula, o material “estava batendo”⁸. Em seguida, o rapaz levava para mim na sala e eu entregava para poder ter maior fixação, né?! Eu cobrava muito, mas muito mesmo deles. Eles ficavam “meio esticados” com tanta coisa, até porque o Colégio não era fácil, viu?! O Colégio puxava muito. A professora de História não deixava escapar, era Matemática de um lado, História de outro, Português do outro... cada um puxava para o seu lado.

Quando chegaram os livros onde foram dadas as Transformações, então encaixou, aquilo era apresentado num crescendo... Pode até ser que alguém dissesse: “Ah! mas eu achava que a outra maneira era mais simples, era mais imediata”; eu digo uma coisa: “mas aí você não teria, de maneira nenhuma, a visão de como aquilo se passava”. E isso depois se estendia para ensinar todas as funções, trigonométricas, logarítmicas, exponenciais...

⁸Uma expressão que era muito usada para se referir a fazer cópias de um documento no mimeógrafo, registrado originalmente no papel stencil.

⁷CATUNDA; DANTAS, et al., v. I, II, III, IV, 1971.

Omar Catunda era o nosso coordenador, ele foi nosso diretor no Instituto de Matemática — não sei lhe precisar quanto tempo ficou na direção. Depois se aposentou, se afastou, mas continuou a orientar esse trabalho que Martha redigiu. Ele não ia mais, mas ele dava orientações. Nós nos reuníamos na residência de Martha e não tínhamos horário de saída, só de chegada. A gente ia se entusiasmando, a gente ia ficando, ficando... era lá na casa dela na Graça porque, na verdade, nós éramos funcionárias do governo e tínhamos esse privilégio de fazer esse trabalho, e como era difícil encontrar uma sala onde nós nos reuníssemos e tivéssemos tranquilidade total, ela puxou para casa dela.

Ela era a mais velha e puxou para casa dela. Mas, era mais rigorosa do que qualquer chefe de departamento, qualquer chefe de faculdade, ela era muito séria e nós retribuíamos, né?! Todo dia em vez de ir para outro lugar, íamos pra casa dela. O trabalho era feito lá.

Então, eu mesma não tenho assim aquela vaidade, aquela pretensão de ter feito... de aplicar método A, método B, meu negócio era... o meu intuito era estudar com eles, era fazê-los entender como eu estava entendendo aquilo, porque não tinha tempo nem de amadurecer. Eu... eu gostava da experiência em si, eu gostava! Mas, dizer que eu tinha conhecimento completo, eu não tinha nem... pra falar francamente, eu não tinha nem consciência de que a matéria seria dada para eles na universidade, mas, depois é que eu fui saber que era... que constituía a matéria de Geometria Analítica e, também da parte moderna, que eles já começavam comigo, não era na faculdade, não.

Eu não tinha total consciência do bem que a aplicação daquelas apostilas ia fazer porque... Quando eles entraram na faculdade já deslancharam, porque o vestibular para eles foi considerado facilímo e as matérias tinham a ver com a matéria que eu ensinei, que estava associada à Matemática Moderna.

Foi o professor Catunda que introduziu no Colégio de Aplicação a noção de Estatística, a noção de Financeira e a noção de Derivada, que não se usava, né?! Não se dava, não. No livro do 3º ano tinha Derivada, Financeira e Estatística. Não precisava ser com profundidade, mas uma espécie de apresentação e você vê que tanto valeu que entrou no programa do vestibular, não foi? Ele tinha uma visão muito além, apesar de ser uma pessoa de idade, ele tinha uma visão muito grande. Não precisava ficar se aprofundando em coisas que eles poderiam ver depois, não era essa a pretensão dele. A pretensão era que tivessem uma visão geral desses assuntos. Quem é que estudava Financeira antes? Nunca, nunca ouvi dizer, mas foi lá que foi intro-

duzida Financeira, Estatística e Derivada. Derivada? Derivada no 3º ano! É uma coisa também que eles foram ver logo no começo do estudo de Cálculo, né?!

Eu falei da Geometria Analítica, que eles viram... translação, simetria e homotetia, mas a parte de Álgebra, a parte de Cálculo nós introduzíamos no 3º ano do Colégio.

Se você me perguntasse qual a principal mudança trazida pela Matemática Moderna eu diria que era a inserção do conteúdo, mesmo. Porque até então, mesmo quando eu estudei, não se falava em conjuntos, aquela teoria do conjunto todo... e lá no Colégio de Aplicação nós começamos a estudar todo conteúdo pela teoria dos conjuntos.

E isso mudou, inclusive, a maneira deles estudarem, não só no ginásio como no colégio, no colégio principalmente. Facilitou muito mais o aprendizado. Foi muito eficiente pra eles, em vez de ser aquele conteúdo tradicional. Nós estudávamos tudo, mas a maneira de introduzir, a maneira de cobrar também era diferente. Então, na minha maneira de ver, acho que facilitou pra eles terem estudado a parte da teoria dos conjuntos, né?! E como também as modificações na parte de Geometria, Geometria principalmente, facilitou muito.

O estudo da Geometria no Colégio era todo feito através da Geometria das Transformações. Eu sempre estudei formalmente os polígonos, quadriláteros... tudo, tudo através da simetria ou então da homotetia, até Geometria no espaço. Foi muito... abriu muito, sabe?! E abriu facilitando, não abriu complicando esses estudos, não, abriu facilitando. Com a maturidade e os conhecimentos anteriores que eu tinha isso só fez ajudar e pra quem não conhecia de outra forma era muito mais fácil aprender, muito mais fácil. De modo que pra mim foi muito gratificante.

Demonstrações a gente fazia tudo baseado nas Transformações. Mas, aí entrava um fator: a minha dificuldade de me adaptar, porque... eu estudei o processo tradicional, né?! E pelas Transformações era muito simples, às vezes, eles que puxavam... tiravam a conclusão mais rápido do que eu, porque eu tava “caducando já naquele assunto”, né?! Tava usando sempre coisas mais complicadas e pelas Transformações simplificava tudo.

O que foi um pouquinho chato para mim é que eu ensinava no Colégio de Aplicação e no João Florêncio Gomes. Dava vontade de levar essa proposta para lá também, mas não podia por causa do material. O material estava todo “preso” à proposta do Colégio de Aplicação. Não podia fazer. Então, eu fazia lá de uma forma e no João Florêncio de outra.



Figura 3: Registro do 3º Seminário de Pedagogia da Matemática, que ocorreu em Salvador, de 8 a 15 de agosto de 1973. A prof.ª Maria Augusta está na primeira fila, no centro da foto com camisa estampada. Arquivo pessoal da Prof.ª Maria Augusta

Eu não entendo a dificuldade que existiu de aplicar aqueles livros nos diversos colégios onde depois foram feitas iniciativas semelhantes. Acho que não tinha a ver com o Colégio de Aplicação. Mas, Dona Martha como parte do estudo sobre aquela proposta levou para outros colégios e foi bem difícil, não sei se falta de base, preparo ou mesmo coragem do professor para aplicar.

O que mais eu lamento é o Colégio ter acabado. Parece que a Universidade achava um desperdício que professores que recebiam um salário de professores da universidade estivessem trabalhando em um colégio de ginásio e, por conta disso, o reitor achou por bem fechar. Foi na época da professora Zilma (Parente de Barros). Foi ela que deu por terminado, né?! Foi na gestão dela que o Colégio acabou. Eu acho que a decisão foi de ordem financeira. Agora, se olhassem para o outro aspecto, para a sociedade, não tinha coisa melhor.

O retorno ao Ensino Superior

Já na Faculdade quando eu voltei... eu ensinei uma matéria que não existe mais, que era uma espécie de recuperação. Era assim: você entrava no curso de Matemática com uma nota de entrada no curso, com uma nota de Matemática fraca, aí a Universidade dava um “curso de recuperação”, em que me foi pedido para explorar Geometria, Trigonometria e... essas matérias assim, para ver se melhorava o nível, mas, não deu muito certo, não, porque não continuou.

Hoje em dia acho que entra pesado nas matérias de

Cálculo, Geometria analítica... entra pesado, não tem mais isso, não, mas levou-se alguns anos, eu não sei se foram dois ou três anos com essa experiência. Esse curso, apesar de ter esse conceito: “ah, é recuperar os alunos que tiraram nota baixa, que não atingiram o certo nível em Matemática...” tive alunos que eram ótimos.

O curso se chamava Complementos de Matemática e era uma espécie de revisão do Curso de Científico para que os alunos enfrentassem melhor a faculdade. Mas, também tinha aquele aluno que já se achava capacitado para enfrentar a Matemática e tudo mais. Mesmo assim tinha que tolerar uma pessoa fazendo revisão, coisa que ele já tinha feito no cursinho, coisas muito melhores, talvez. Aí eu tive que fazer alguma coisa diferente, né?! Dialogar e discutir umas questões, botar uns problemas difíceis para resolver e tudo... mas, terminou.

Depois foi que eu comecei a ensinar disciplinas de Cálculo. Ensinei Cálculo 1, Cálculo 2, só não cheguei a Cálculo 3, nunca peguei uma turma de Cálculo 3, só Cálculo 1 e Cálculo 2.

Lembrando da Professora: memórias de ex-alunos de Maria Augusta

Segue a textualização de uns poucos trechos de entrevistas de ex-alunos da professora Maria Augusta no Colégio de Aplicação. Esses trechos são bem emblemáticos da atuação dela, reforçando as memórias dela sobre o trabalho que realizou ou indicando o modo como ela ficou marcada na memória deles.



Figura 4: A prof.^a Maria Augusta entre os estudantes do CA. Arquivo pessoal da Prof.^a Maria Augusta.

Jaci Maria Ferraz de Menezes ⁹ Quando Maria Augusta começou a trabalhar com a nossa turma, eu acho que já na primeira unidade ela trabalhou com algumas apostilas com teoria de conjuntos. É uma lembrança fugaz — eu acho que era só para ela dar uma “agilizada nos conceitos”, no início.

Dona Martha (Dantas) era assim, aquela senhora imponente, sempre de salto alto, certo?! E que estava presente todo o tempo na vida do Colégio e... Maria Augusta era baixinha, um pouco menor, e, assim, ela é elétrica, “The Flash”. Ela entrava na sala de aula, ela não fazia mais chamada, então, ela deixou pra lá. “Bom dia, bom dia, bom dia...”, passava para o quadro de giz e passava uma lista de exercício e começava o trabalho, a fazer exposição e, depois, começava o trabalho todo, com exercícios, etc.

“Guguta” se lembra de uma resistência à implantação das atividades de Matemática por parte de uma colega que fumava — nós, na época, as meninas na sala, ninguém fumava na sala, era proibido, mas no intervalo podia fumar, nos corredores não tinha maiores restrições —, então, o pessoal tava na porta da sala esperando ela chegar aí, na hora que ela chegou, essa colega encheu o pulmão e soltou a fumaça no rosto dela. Ela ficou ofendidíssima, se sentiu agredida, ela se lembra até hoje! Ela perguntou pra mim dessa vez que a gente se encontrou, em dezembro do ano passado: “como era o nome daquela sua colega...” eu disse: “eu não me lembro, Maria Augusta”. “Ah, pois ela encheu o pulmão e soltou a fumaça na minha cara.”

Pense numa barreira, assim, uns três ou quatro, na

hora dela entrar na sala... porque, justamente, esse pessoal tava que não aguentava mais a Matemática no regime linha dura de Maria Augusta. No ano seguinte eles passaram para o Clássico. Mas, ela fazia com muita naturalidade... não é livrando a cara dela, não, ela fazia com muita simpatia, ela dava aula, fazia, preparava... e o pessoal aprendia, tanto assim que eu que não sou do ramo ainda me lembro.

Anônima ¹⁰ Como é que a gente aprendia a demonstrar na escola? Não sei como a gente aprendia a demonstrar na escola, não sei, mas se você conseguir um livro da época, você pode ver que tudo tem demonstração, tudo tem hipótese, tese, demonstração. Se fazia, se fazia.

Outro dia eu perguntei a Maria Augusta: “Maria Augusta, como é que você enfiava aquilo tudo na cabeça da gente?” e ela respondeu: “também não sei, eu também não sei”. E a gente aprendia, a gente aprendia.

Não era Geometria tradicional, não, era com rotação, simetria, translação e a geometria plana era toda com base nas transformações lineares, nas transformações no plano. Maria Augusta era professora de Matemática que aplicava.

Tudo, tudo, tudo mesmo, que você possa imaginar em trigonometria, era dado. A gente saiu do Aplicação com Limite, Derivada e Integral, perfeita. Teoremas e tudo! Sai de lá completa. Eu saí do Colégio direto para a Universidade. Terminei em meia nove e, em setenta, eu tava cursando (Matemática).

⁹Ingressou no CA em 1961.

¹⁰Ingressou no CA na turma de 1963.

Raimundo Mesquita de Luna Freire¹¹ Durante os meus sete anos no Colégio, somente em um deles, o segundo ano, é que eu tive uma outra professora, durante seis dos sete anos a professora foi Maria Augusta Moreno. Ela era uma das professoras que, junto com o professor Omar Catunda, desenvolvia aquela metodologia que a gente estudava.

O que eu me lembro é que ela era uma pessoa altamente comprometida, muito bem preparada, que sabia a matéria que ensinava e sabia transmitir. Eu imagino que ensinar aos meninos de doze, treze anos, você sendo uma professora que, inclusive, dá aula na universidade, isso aí exige uma habilidade específica e ela tinha. Então, ela tinha tanto conhecimento naquilo que ia ensinar quanto uma facilidade de transmitir.

Ela tinha uma didática muito boa. Era uma pessoa muito rígida e inflexível, que não dava essa abertura para contestar, nem pra tirar dúvidas, pelo menos essa era minha sensação, e era uma sensação generalizada, pelo que eu sei, não era só minha, não, era uma sensação generalizada, mesmo para tirar dúvida. Você tinha medo de dizer “não entendi, pode explicar...” claro que existia essa possibilidade, não era um regime ditatorial, mas tinha uma barreira grande que eu não tinha com outros professores, para você ver que não era uma regra da Escola, era uma coisa muito da personalidade dela, tinha professores até piores...

Outra coisa que eu tô me lembrando agora... a avaliação normalmente era um teste e uma prova a cada unidade, além disso, tinha um “testezinho” praticamente todo dia de aula, tinha um teste de uma única pergunta no início da aula. A gente tinha uma cadernetazinha, todo mundo tinha que ter uma caderneta dessa, então, no início da aula ela passava uma pergunta, só um problema rápido, que você tinha que resolver em dez ou quinze minutos e, aí, no fim da unidade, a soma desses vários pequenos testes valia uma nota também, igual à nota do teste e da prova. Acredito que era uma forma de obrigar a tá em dia com a matéria, né?!

Essa cadernetinha ficava com a gente. Era assim, você levava sua caderneta, ela passava o problema, você resolvia ali e entregava para ela na mesma hora. No mesmo dia ela devolvia, já com a sua nota, né, como era só uma questão, era “um certo”, “um errado” ou “um meio certo”, sei lá... mas ela devolvia no mesmo dia que você levava, então, só ficava com ela para corrigir. Foi o que eu disse, acho que a ideia era obrigar a ficar em dia com a matéria, para que você não acumulasse para a véspera da prova, né?! Você ti-

nha que estar em dia com a matéria. Em geral, essas questões não eram questões muito difíceis, até porque você tinha pouco tempo para resolver, era mais objetiva mesmo, sobre o que tinha sido dado na última aula.

Valber Roberto Carneiro Carvalho¹² Quando chegamos na sétima série, sétima e oitava, nós tivemos o prazer de estudar, de sermos alunos de uma mulher... uma das autoras do livro que a gente estava estudando, você imagina o que significa isso? Maria Augusta. O livro era feito por oito pessoas, o primeiro, o mais famoso, um “matemático daqueles” chamado Omar Catunda, e ela era a última ou a penúltima. Rapaz, aquilo era um delírio pra gente, a mulher era uma das autoras do livro que a gente tava estudando!

Você conversava com gente, com seus colegas de outros colégios... o livro de Matemática que a gente estudava tinha nossa professora como uma das autoras!

As provas dessa professora, Maria Augusta, eram assim: “Considerando que existem duas retas paralelas que cortam outras duas retas — não sei o que lá... — e que o ângulo tal S_1 é igual... congruente com o ângulo tal... prove que essa terceira reta que passa aqui é paralela também a essas duas”. Você tinha que provar por lógica geométrica. “Com efeito...” — a gente tinha que começar assim —, “com efeito, considerando-se que o ângulo tal é igual ao ângulo tal e que o teorema de não sei quem diz que quando duas retas se cruzam no ângulo tal pa-pa-pa... gera uma terceira reta não sei o quê...”

Então, para você responder aquilo você escrevia um catatau de treze linhas, justificando... até você provar por A mais B, por lógica, que aquele ângulo tal era igual ao ângulo tal. A prova de Matemática da oitava série, era assim, era uma prova muito difícil, tinha que escrever, que relacionar teoremas e gerar conclusões, lhe colocava para pensar.

Isso era a Matemática da 8ª série! Isso mexia com a gente pra caramba e, confesso a você, tinha uma certa dificuldade, não era um terreno em que eu bailava... eu tinha que fazer uma explanação sobre a Matemática, porque que isso é igual a isso e porque isso é simétrico a isso. Eu tinha que usar a lógica, os teoremas, usar as teorias da Matemática pra chegar ao resultado desejado, entendeu?! Isso não era mole, não, você escrevia muito, você saía de cuca fundida das provas.

Ela inventou um sistema de avaliação em que o

¹¹Ingressou no CA na turma de 1966. A entrevistada preferiu não ser identificada, preferindo a utilização deste pseudônimo.

¹²Ingressou no CA em 1971 e teve que sair após a 8ª série por não serem mais oferecidas novas turmas para o Segundo Grau (atendendo ao processo de redução de turmas em função do fechamento do CA, que se deu em 1976).

aluno tinha que estar presente no início da aula, você não podia faltar e não podia perder o início da aula porque havia um teste, ela chamava de miniteste ou “testinho”. Para ninguém “pescar” ela dividia a sala em quatro diferentes turmas com testes diferentes e, então, ela dava quatro exercícios, um para cada uma dessas turminhas responder, aí você respondia e ela recolhia em cinco minutos.

Quando você acertava recebia um “mais” e se errasse recebia um “menos”. A quantidade de “mais” que você tivesse era somada e aquilo gerava uma nota que ia ser combinada com a nota da prova, e aquilo era um terror de alguma forma, mas também te mantinha aceso, é como um piloto de avião que tem que fazer teste todo mês para saber se está bem. Só que era toda aula, e foi um período, muito, mas muito difícil, eu fui muito bem na sétima série, eu me lembro, em equações do segundo grau e sofri um pouquinho na oitava, que era Geometria.



Quando realizei entrevistas com ex-alunos do Colégio de Aplicação a professora Maria Augusta foi a professora que mais figurou como associada ao projeto de modernização da Matemática liderado por Martha Dantas e Omar Catunda.

As marcas que ela deixou na memória de seus alunos lhe deram um certo destaque, seja pelo grau de comprometimento com o ensino de Matemática, seja pelas mudanças que aquele projeto representou na formação acadêmica deles, repercutindo na trajetória profissional mesmo daqueles que não seguiram carreiras ligadas às exatas.

Enfim, este artigo trouxe memórias ligadas à trajetória profissional da própria professora Maria Augusta de Araújo Moreno e uma seção com recortes de memórias de alguns ex-alunos dela no Colégio de Aplicação.

Podemos concluir afirmando que com este trabalho se destacou um perfil de professores do IME que, desde o começo do Curso de Matemática, enfocaram sua atuação na qualificação do ensino de Matemática na Educação Básica baiana, que acompanharam o trabalho iniciado pela professora Martha Maria de Souza Dantas, nossa personagem mais renomada nesse campo de atuação do Instituto.

Bibliografia

CATUNDA, O.; DANTAS, M. M. S. *et al.* *Ensino atualizado da matemática 1*: curso ginásial. Vol. I, São Paulo: EDART, 1971.

_____. *Ensino atualizado da matemática 2*: curso ginásial. Vol. II, São Paulo: EDART, 1971.

_____. *Ensino atualizado da matemática 3*: curso ginásial. Vol. III, São Paulo: EDART, 1971.

_____. *Ensino atualizado da matemática 4*: curso ginásial. Vol. IV, São Paulo: EDART, 1971.

OLIVEIRA FILHO, F. *O School Mathematics Study Group e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil*. 2009. 201 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

DIAS, A. L. M. *Engenheiros, Mulheres, Matemáticos: interesses e disputas na profissionalização da matemática na Bahia (1896 – 1968)*. São Paulo, 2002. 320 f. Tese (Doutorado em História Social) – Universidade de São Paulo.

MENEZES, M. B. *A Matemática das Mulheres: as marcas de gênero na trajetória profissional das professoras fundadoras do Instituto de Matemática e Física da Universidade da Bahia. (1941-1980)*. Salvador, 2015. 381 f. Tese (Doutorado em Estudos Interdisciplinares sobre Mulheres, Gênero e Feminismo) – Universidade Federal da Bahia.

MORENO, Maria Augusta de Araújo. *Entrevista*. Salvador, 13 fev. 2012.

MORENO, M. A. A. *Ficha Funcional*. Salvador, Arquivo da Pró-Reitoria de Desenvolvimento de Pessoas da Universidade Federal da Bahia (PRODEP-UFBA). Acesso em 18 jun. 2026.

RIOS, D. F. *Memórias de ex-alunos do Colégio de Aplicação da Universidade da Bahia sobre o ensino de Matemática Moderna: a construção de uma instituição modernizadora*. 2012. 505 f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2012.



Diogo Franco Rios é sergipano de família baiana do sertão. Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela UEFS, mestrado e doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela UFBA/UEFS. Pesquisador em História da Matemática e da Educação Matemática. Atualmente é docente em Colaboração Técnica no Departamento de Matemática do IME/UFBA. Coordena três projetos: Memórias da Matemática na UFBA, Cineclube de História da Matemática e Seminários de Educação Matemática, além de integrar o projeto de extensão PECMat. Canta, fotografa, escreve poesia e produz artesanato, como formas de expressão e autocuidado.

PANORAMA

Caos em Bilhares Dinâmicos

Yuri Lima

Um dos exemplos clássicos em sistemas dinâmicos é o de bilhares, que foram introduzidos há mais de um século como simplificações do modelo de Boltzmann na Mecânica Estatística. Os bilhares podem exibir diferentes comportamentos dinâmicos, dos mais simples (totalmente integráveis) aos mais complexos (caóticos). Neste PANORAMA, discutiremos as diferentes classes de bilhares dinâmicos, com foco nos bilhares dispersivos, que possuem diversas propriedades caóticas.

Introdução

Um bilhar dinâmico é um tipo de sistema que modela o movimento de partículas em um espaço. Este modelo matemático, surgido no início do Século XX, é extensivamente estudado e utilizado para compreender fenômenos complexos e comportamentos caóticos.

A ideia básica do bilhar dinâmico é estudar o comportamento do movimento de partículas após múltiplas colisões que sofrem entre si e com a borda da região em que se encontram. Dependendo do formato da borda, a trajetória das partículas pode ser bem simples ou, contrariamente, extremamente caótica. Desta forma, bilhares dinâmicos são um tópico de pesquisa muito interessante em sistemas dinâmicos, e as ferramentas desenvolvidas em seu estudo fornecem métodos potentes que são aplicados em outros contextos da Matemática.

A maioria dos leitores deve conhecer o jogo de **bilhar**. Presente na nossa vida cotidiana, ele consiste em uma mesa retangular, com seis buracos. Sobre

a mesa, encontram-se bolas esféricas que se movem por meio de batidas de um taco. Uma vez que sofre

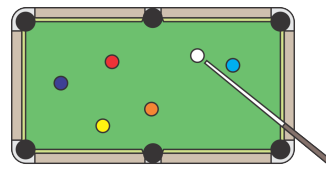
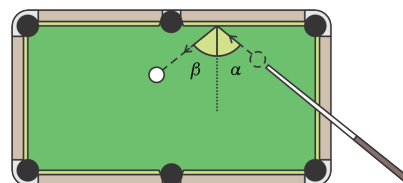


Figura 1: Sinuca, com buracos, bolas e taco.

a ação do taco, uma bola se move em movimento retilíneo, até uma das três situações ocorrer: a bola cai em um dos buracos; a bola se choca com a borda da mesa e então a trajetória da bola sofre uma reflexão; ou a bola se choca com outra bola, e então a bola em movimento transfere parte de sua energia para a bola com que se choca. A partir deste momento, duas bolas passam a se mover, de acordo com as mesmas regras acima descritas, e assim sucessivamente.

Quando as bolas se chocam com a borda ou entre si, como podemos identificar a trajetória que cada uma delas passa a ter? Na prática, há dissipação de energia devido a vários fatores como a fricção, portanto não sabemos. Isso ocorre também quando a bola se choca com a borda da mesa: se α é o ângulo que a trajetória faz com a mesa, medido a partir da direção perpendicular à mesa, então em um contexto ideal o ângulo de reflexão β deve ser igual a α . Na



prática, α e β são apenas aproximadamente iguais. Para melhor entender o efeito da borda da mesa no movimento das bolas, no que segue, vamos nos ater a uma situação bem simplificada, assumindo que:

Hipótese 1: A mesa não possui buracos.

Hipótese 2: Temos apenas uma bola na mesa. Ela será representada por um ponto, que chamaremos de partícula.

Hipótese 3: Não há dissipação de energia.

Neste caso, $\alpha = \beta$. Este contexto caracteriza o que chamaremos de um **bilhar dinâmico**: dado um domínio compacto D do plano $\mathbb{R}^2$ ou do toro bidimensional $\mathbb{T}^2$, que chamaremos de **mesa de bilhar**, consideramos uma partícula que se move com velocidade constante sobre a mesa e se choca com a borda da mesa, tal que o ângulo de incidência é igual ao de reflexão em cada colisão. No que segue, discutiremos diferentes classes de bilhares dinâmicos. O leitor interessado pode consultar o livro [6] para uma discussão detalhada do tópico.

Exemplos introdutórios de bilhares dinâmicos

2.1 Bilhar no círculo

Começamos considerando o bilhar em um círculo, que assumimos possuir raio 1. Considere três colisões sucessivas, denotadas na figura abaixo por A, B, C . É fácil notar que os triângulos ABO e BCO são isósceles, donde $AB = BC$. Portanto, todas as cordas de-

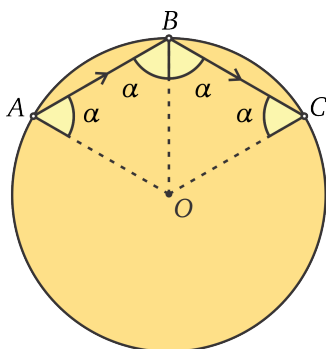


Figura 2: Bilhar no círculo.

terminadas por colisões sucessivas em uma trajetória possuem o mesmo tamanho 2ℓ . Quando 2ℓ coincide com o tamanho do lado de um n -ágono regular, a trajetória da partícula será **periódica**, igual a um n -ágono regular. Mas, em geral, 2ℓ difere de todos

os tamanhos de lados e diagonais de polígonos regulares, e daí obtemos uma **trajetória aperiódica**, em que a sequência de batidas nunca fecha. Em ambos

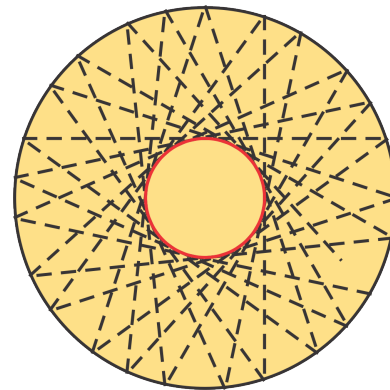


Figura 3: Parte de uma trajetória aperiódica; o círculo vermelho é tangente a todas as cordas da trajetória.

os casos, é fácil notar pelo teorema de Pitágoras que as cordas determinadas por uma trajetória são tangentes a um mesmo círculo de raio $\sqrt{1 - \ell^2}$ e concêntrico ao original. Este círculo menor é chamado de **cáustica**, que em grego significa “queimar”: se imaginarmos que a trajetória da partícula é um raio de luz, então por tangenciar o círculo menor para sempre, ele se aquece indefinidamente, justificando sua nomenclatura.

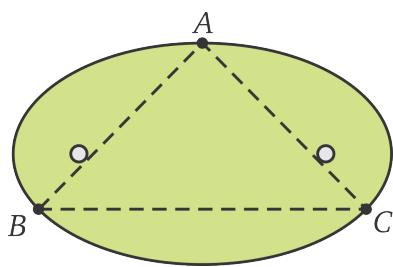
2.2 Bilhar na elipse

Agora consideramos uma mesa de bilhar no formato de uma elipse. Relembre que, dados F_1, F_2 dois pontos do plano e $2a > \overline{F_1 F_2}$, a elipse determinada por $F_1, F_2, 2a$ é o conjunto de pontos do plano

$$\mathcal{E} = \{P : \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a\}.$$

Os pontos F_1 e F_2 são chamados **focos**. Ao contrário do círculo, as retas normais à elipse já não passam todas por um mesmo ponto. Ainda assim, há, felizmente, diversas analogias das trajetórias dos bilhares no círculo e na elipse.

Começamos exibindo exemplos de algumas trajetórias periódicas. Seja AB o eixo horizontal da elipse. É possível, por exemplo, inscrever um triângulo ABC na elipse de modo que os ângulos de incidência e reflexão coincidam em cada um dos vértices; isto define uma trajetória periódica com três batidas. Mais geralmente, para cada n , é possível inscrever uma trajetória periódica de período n (exatamente n batidas). Novamente, é muito difícil uma trajetória ser periódica, e a maioria delas é aperiódica, nunca passando por um mesmo ponto de batida. Adicionalmente,



o bilhar na elipse também possui cáusticas. Porém, aqui temos dois tipos diferentes delas: se as duas primeiras batidas ocorrem em pontos A e B tais que AB não intersecte o segmento F_1F_2 , então todas as cordas desta trajetória são tangentes a uma elipse menor, de mesmos focos F_1, F_2 da original; se AB intersecta F_1F_2 em seu interior, então existe uma hipérbole $\mathcal{H}$ com focos F_1, F_2 tal que todas as cordas determinadas por batidas sucessivas são tangentes a $\mathcal{H}$.

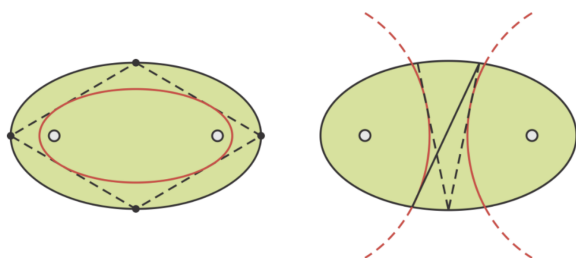
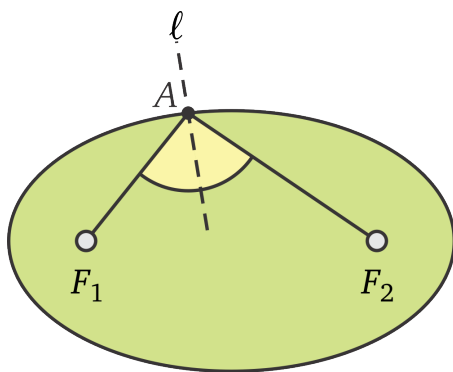


Figura 4: Cáusticas na elipse.

E se o segmento AB passar por um dos focos, digamos F_1 ? Neste caso, o teorema de Poncelet fornece a resposta.

Teorema 2.1 (Poncelet). *Seja $\mathcal{E}$ uma elipse de focos F_1, F_2 . Dado um ponto A da elipse, seja ℓ a reta normal à elipse passando por A . Então os ângulos que AF_1 e AF_2 fazem com ℓ são iguais.*

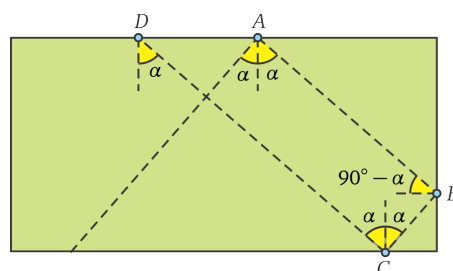


Pelo teorema acima, se AB passa por F_1 , então todas as cordas definidas por batidas sucessivas passam pelos focos, alternadamente. Neste caso, podemos considerar os pontos F_1 e F_2 como cáusticas dessas trajetórias.

As propriedades do círculo e elipse valem, de fato, para qualquer mesa de bilhar convexa (e suficientemente regular). Estes são resultados profundos, decorrentes de argumentos em dinâmica conservativa e teoria KAM (devida a Kolomogorov, Arnold e Moser). O leitor interessado pode consultar [5] sobre este tópico.

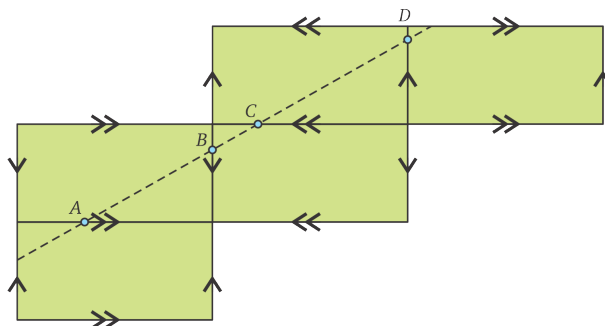
2.3 Bilhar no retângulo

Agora focamos no bilhar que estamos mais acostumados, cuja mesa tem formato retangular. Considere uma trajetória como na figura ao lado. Notamos que se o primeiro ângulo de incidência é α , então todos os ângulos serão α ou $90^\circ - \alpha$. Mesmo assim, a trajetória



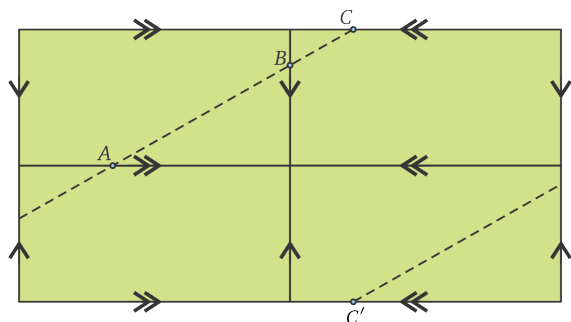
ria da partícula pode ser extremamente complicada. Para melhor entender esse comportamento, utilizamos uma ideia advinda da ótica.

Ao invés de refletir a trajetória, refletimos a mesa de bilhar: podemos considerar a trajetória continuando **em linha reta** nessa mesa refletida, sem nenhuma mudança de ângulo. Podemos realizar esse processo em cada batida, indicando como as orientações dos lados do retângulo mudam. No caso da trajetória da figura acima, que realiza quatro batidas nos pontos A, B, C, D , as reflexões são descritas abaixo. Portanto, após essas quatro colisões, a mesa volta a ser a mesma mesa.



Para melhor entender esse processo, vamos reexplicá-lo de outro modo. Considere a mesa original, e três de suas reflexões como na figura abaixo. Os lados esquerdo e direito coincidem, assim como os lados superior e inferior. Portanto, quando a partícula colide no ponto C , podemos representar a

continuação da trajetória no ponto C' abaixo. Assim,

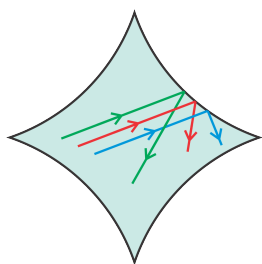


em uma mesa quatro vezes maior, a trajetória da partícula sempre segue em linha reta, levando-se em conta de que as bordas esquerda e direita são as mesmas, assim como as bordas superior e inferior. Estas identificações definem a mesa maior como sendo o toro bidimensional $\mathbb{T}^2$.

Este método pode ser aplicado a qualquer mesa de bilhar poligonal em que os ângulos internos são múltiplos racionais de π . Neste caso, o grupo de simetria do polígono é finito, e todas as reflexões possíveis definem uma **superfície de translação**, onde a trajetória original do bilhar é identificada com uma trajetória retilínea. O estudo de superfícies de translação é uma área que relaciona Geometria, Sistemas Dinâmicos e Topologia, e a partir dela podemos deduzir diversas propriedades interessantes de tais mesas de bilhar. Notamos, porém, que se algum ângulo interno for um múltiplo irracional de π , então o problema ainda não possui compreensão satisfatória. O livro [1] possui uma excelente introdução ao tópico de superfícies de translação.

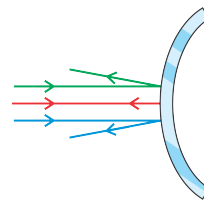
Bilhares dispersivos

O matemático russo-americano Yakov Sinai iniciou, no final da década de 1960, um estudo sistemático de bilhares caóticos. Motivado pela ótica, Sinai considerou bilhares em que o formato do bordo é côncavo do ponto de vista da partícula. Veja um exemplo na figura abaixo.

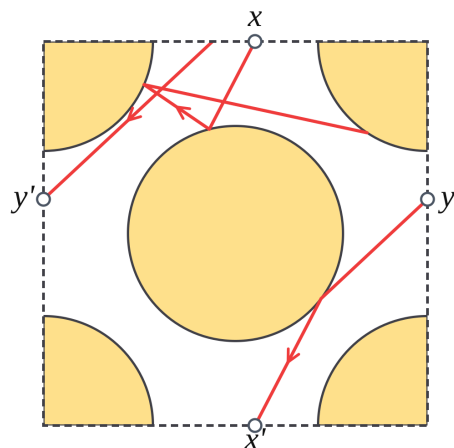


Sempre que um feixe de trajetórias paralelas se choca com o bordo, ele se dispersa. Portanto, se

imaginarmos um conjunto de trajetórias inicialmente bem próximas, após algumas batidas elas ficam praticamente independentes, espalhando-se por toda a mesa, indicando uma **sensibilidade às condições iniciais**.



Estes bilhares (em que o bordo sempre é côncavo do ponto de vista da partícula), são hoje conhecidos como **bilhares de Sinai** ou **bilhares dispersivos**. Eles também podem ser construídos no toro bidimensional $\mathbb{T}^2$: considerando um domínio fundamental igual a um quadrado de lado 1, considere dois obstáculos circulares, um deles localizado no centro do quadrado e o outro em um dos vértices do quadrado, como na figura abaixo. Descrevemos também uma



possível trajetória, levando-se em conta as identificações dos lados paralelos.

Sinai provou diversas propriedades caóticas de tais bilhares. Em particular, ele mostrou que os bilhares dispersivos são **ergódicos**. Em poucas palavras, este conceito significa que com 100% de chance as trajetórias se espalham por toda a mesa.

3.1 Motivação: o movimento de um elétron em um metal

Em 1905, o físico teórico e matemático holandês Hendrik Lorentz propôs um modelo que pode ser interpretado como um bilhar dispersivo. Lorentz queria modelar o movimento de um elétron dentro de um metal. Por serem bem mais pesadas do que o elétron, Lorentz assumiu que as moléculas de metal são fixas, cada uma delas representada por uma esfera, e que o

elétron se move em linha reta e colide com as moléculas do metal por meio de reflexões elásticas. Este modelo é conhecido como **gás de Lorentz**. Se imaginarmos que o metal é formado por dois tipos de moléculas, dispostas periodicamente no plano, então o elétron se move em um bilhar dispersivo conforme a figura abaixo.

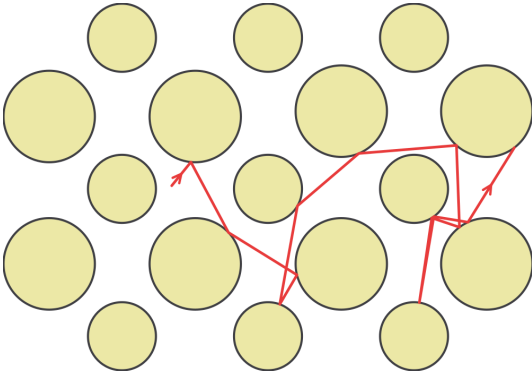


Figura 5: Gás de Lorentz, que pode ser interpretado como um bilhar dispersivo.

3.2 O conceito de entropia

Uma maneira de entender as trajetórias de um bilhar é por meio do sistema dinâmico associado, chamado **transformação de bilhar**. A transformação de bilhar é a função que, a cada posição p no bordo da mesa D e ângulo α medido em p com respeito à reta normal, associa a próxima posição de batida p' e o próximo ângulo de incidência α' . Em outras palavras, $f(p, \alpha) = (p', \alpha')$ descreve a evolução da trajetória que começa a partir da condição inicial (p, α) . A iteração de f uma quantidade n de vezes fornece $f^n(p, \alpha) = (p_n, \alpha_n)$ onde p_n é a posição da n -ésima batida e α_n é o ângulo de incidência associado.

Esperando que f exiba um comportamento caótico, a sequência de pontos (p_n, α_n) deve ser bastante variada. Uma das maneiras de entender esta variabilidade é por meio da **teoria ergódica**, área que estuda o comportamento de sistemas dinâmicos na presença de **probabilidades invariantes**. Informalmente, uma probabilidade é invariante se a evolução no tempo por f preserva o “tamanho” dos conjuntos. Formalmente, se $f: X \rightarrow X$ é uma transformação, então uma probabilidade μ em X é f -invariante se

$$\mu(f^{-1}A) = \mu(A)$$

para todo conjunto A (a definição precisa requer a discussão de conjuntos mensuráveis e sigma-álgebra, que não faremos aqui). Do ponto de vista probabilístico, isto diz que a chance de tomar um ponto x alea-

toriamente e ter que $x \in A$ coincide com a chance de que $f(x) \in A$.

Esta propriedade é encontrada em modelos advindos da física. Na verdade, tais modelos possuem, em geral, diversas probabilidades invariantes. Como descrever aquela que possui a maior quantidade de caos? Uma das maneiras de responder a esta pergunta é por meio da noção de **entropia**. Motivados pelas ideias de **teoria da informação** desenvolvidas por Shannon na década de 1950, Kolmogorov e Sinai desenvolveram uma teoria que, a cada probabilidade invariante μ , associa um número não-negativo $h(\mu)$, chamado entropia de μ .

Formalmente, para cada partição $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_k\}$ de X , definimos a entropia de $\mathcal{P}$ com respeito à probabilidade μ por

$$H(\mathcal{P}) = - \sum_{i=1}^k \mu(A_i) \log \mu(A_i).$$

Este número, que é não-negativo, pode ser interpretado da seguinte forma: tomando-se “aleatoriamente” um ponto $x \in X$, qual o preço que devemos pagar para saber qual A_i contém x ? Este preço é igual a $H(\mathcal{P})$.

Agora queremos saber o preço a ser pago para tomar $x \in X$ e saber em quais elementos de $\mathcal{P}$ caem os pontos $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$. Este preço é igual a

$$H(\mathcal{P}; n) = - \sum_{B \in \mathcal{P}_n} \mu(B) \log \mu(B),$$

onde a soma é realizada sobre todos os conjuntos B da forma $A_{i_0} \cap f^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(A_{i_{n-1}})$. A entropia de μ com respeito a $\mathcal{P}$ é definida como a taxa de crescimento linear de $H(\mathcal{P}; n)$:

$$h(\mu, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{P}; n).$$

Finalmente, definimos a entropia de μ .

Definição 3.1 (Entropia). A **entropia** de μ com respeito a f é definida por

$$h(\mu) = \sup\{h(\mu, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partição finita}\}.$$

Intuitivamente, se a entropia de μ é h , então tipicamente o número de sequências observáveis de comprimento n cresce como e^{hn} . Portanto, quanto maior h , maior a riqueza de trajetórias.

Uma discussão mais precisa sobre este conceito pode ser encontrada em [9].

3.3 Medidas de máxima entropia

Dentre as probabilidades, a que identifica a maior caoticidade de f é a que tem a maior entropia.

Definição 3.2 (Medida de máxima entropia). Dize-mos que uma probabilidade invariante μ é **medida de máxima entropia** para f se, dentre todas as probabilidades invariantes, μ maximiza a entropia:

$$h(\mu) = \sup\{h(\nu) : \nu \text{ é probabilidade invariante}\}.$$

Entender quando uma transformação f possui uma medida de máxima entropia e se ela é única constitui uma intensa área de pesquisa em Sistemas Dinâmicos. Desde a década de 1970, esta pergunta vem sendo investigada para diversas classes de modelos diferentes. Nos últimos dez anos, presenciamos os primeiros resultados para os bilhares dispersivos (sim, apenas recentemente estas perguntas foram respondidas, ainda que de modo parcial). Hoje em dia, diversos trabalhos contribuíram para uma melhor compreensão desta pergunta:

- Baladi e Demers provaram que uma grande classe de bilhares dispersivos possuem uma única medida de máxima entropia [2].
- Baladi, Buzzi, Demers, Lima e Matheus mostraram que o número de trajetórias periódicas desta grande classe de bilhares dispersivos cresce exponencialmente rápido como e^{hn} , onde h é a entropia máxima [2, 3, 7].
- Lima, Obata e Poletti mostraram que os bilhares dispersivos possuem no máximo uma medida de máxima entropia “bem comportada” (chamada de adaptada) [8].
- Em 2026, Climenhaga e Day forneceram uma prova de que os bilhares dispersivos sempre possuem uma única medida de máxima entropia [4].

Notamos que uma trajetória periódica do bilhar não significa apenas que a trajetória passa novamente pelo mesmo ponto de partida da mesa, mas que ela deve voltar também com o mesmo ângulo! Até em bilhares dispersivos simples, identificar tais trajetórias não é uma tarefa simples.

As ferramentas utilizadas nas provas dos resultados acima são bastante variadas, e ajudaram a desenvolver a área com novas técnicas que agora podem ser aplicadas em outros contextos.

Ainda há, porém, muito a ser compreendido. Deixamos aqui um problema que permanece em aberto,

para bilhares triangulares. Se o triângulo for acutângulo, então o triângulo órtico constitui uma trajetória periódica de período três. Se o triângulo for obtusângulo, então não se sabe se existem trajetórias periódicas.

Bibliografia

- [1] Athreya, Jayadev S. e Masur, Howard, *Translation surfaces*, Graduate Studies in Mathematics **242** (2024).
- [2] V. Baladi e M. Demers, *On the measure of maximal entropy for finite horizon Sinai billiard maps*, J. Amer. Math. Soc. **33** (2020).
- [3] J. Buzzi, *The degree of Bowen factors and injective codings of diffeomorphisms*, J. Mod. Dyn. **16** (2020).
- [4] Vaughn Climenhaga e Jason Day, *Every finite horizon Sinai billiard map has a unique measure of maximal entropy*, arxiv:2604.25881
- [5] J. Fejoz, Introduction to KAM theory, with a view to celestial mechanics, in *Variational methods in imaging and geometric control Radon Series on Comput. and Applied Math.* **18**, (2016).
- [6] N. Chernov e R. Markarian, *Chaotic billiards*. Math. Surveys Monogr. **127** (2006).
- [7] Y. Lima e C. Matheus, *Symbolic dynamics for non-uniformly hyperbolic surface maps with discontinuities*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **51** (2018).
- [8] Yuri Lima, Davi Obata e Mauricio Poletti, *Measures of maximal entropy for non-uniformly hyperbolic maps*, aceito em JEMS (2026).
- [9] M. Viana e K. Oliveira, *Fundamentos da Teoria Ergódica*. Sociedade Brasileira de Matemática (2019).



Yuri Lima é Professor Titular da Universidade de São Paulo, com graduação e mestrado pela Universidade Federal do Ceará e doutorado pelo IMPA. Realizou estágios de pós-doutorado no IMPA, no Weizmann Institute of Science, na University of Maryland e na Université Paris-Sud 11, e foi Professor Adjunto da UFC entre 2017 e 2024. Atua em Sistemas Dinâmicos, Teoria Ergódica, Combinatória e Probabilidade, tendo recebido distinções como a Royal Society-Newton Advanced Fellowship, menção honrosa no Prêmio SBM e o Prêmio Jacob Palis ABC-Fulbright. Nas horas vagas, é frequentador assíduo das praias do Ceará, onde pratica kitesurfe.

TÉCNICA

Um Passeio com Primos e Outros Caras Bacanas

Rafael Filipe dos Santos

Introdução

A infinitude dos números primos é um fato conhecido desde a Antiguidade, cuja demonstração mais célebre remonta ao argumento clássico de Euclides.

Teorema 1. [Euclides] *Existem infinitos primos.*

Prova. Suponha por absurdo que haja um número finito de primos e sejam $p_1, p_2, \dots, p_k$ todos os primos. Considere o número $N = p_1 p_2 \dots p_k + 1$ e observe que, pelo teorema fundamental da aritmética, N possui algum fator primo p_j . Mas então p_j divide $N - p_1 \cdot p_2 \dots p_k = 1$, um absurdo. $\square$

E se quisermos provar que existem infinitos primos em uma certa progressão aritmética? Por exemplo, será que existem infinitos primos da forma $4k + 1$? A resposta é afirmativa e é possível adaptar a ideia de Euclides!

Teorema 2. *Existem infinitos números primos da forma $4k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$.*

Prova. Suponha por absurdo que haja um número finito de primos e sejam $p_1, p_2, \dots, p_k$ todos os primos congruentes a 1 módulo 4. Considere o número

$$N = (p_1 p_2 \dots p_k)^2 + 1.$$

Sabemos que todo número da forma $x^2 + 1$ com $x > 1$ possui um fator primo congruente a 1 módulo 4. Logo, N deve possuir algum fator primo p_j . Mas então p_j divide $N - (p_1 p_2 \dots p_k)^2 = 1$, um absurdo. $\square$

Um questionamento interessante é se é possível generalizar as ideias das soluções acima para mostrar

que existem infinitos primos em uma progressão aritmética mais geral, da forma $ak + b$ com a e b inteiros fixados tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$? Note que a condição de a e b serem primos entre si é necessária, pois do contrário qualquer fator comum de a e b dividiria $ak + b$.

A resposta para essa pergunta é afirmativa e é o famoso *teorema de Dirichlet*, provado em 1837.

Teorema 3 (Dirichlet, 1837). *Sejam a e b inteiros positivos com $\text{mdc}(a, b) = 1$. Existem infinitos números primos da forma $ak + b$, com $k \in \mathbb{Z}$.*

As principais demonstrações desse teorema utilizam variáveis complexas e não vão na linha dos argumentos apresentados acima.

O objetivo deste material é, inicialmente, apresentar alguns contextos em que os argumentos utilizados nas demonstrações dos Teoremas 1 e 2 se mostram particularmente interessantes. Em seguida, mudamos ligeiramente o foco para discutir resultados sobre os fatores primos de sequências mais gerais de inteiros. Por fim, comentamos alguns aspectos relevantes relacionados à distribuição dos números primos.

Primos em Uma Progressão Aritmética

Nesta seção discutiremos de modo mais aprofundado alguns pontos por trás das demonstrações de Euclides e do caso $4k + 1$ apresentadas acima.

Para adaptar as ideias para o caso $ak + b$, podemos procurar um polinômio $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ para o qual $f(m)$ possua algum fator da forma $ak + b$ para todo

m suficientemente grande. No caso da prova de Euclides, como não temos restrições para o primo, usamos simplesmente $f(x) = x + 1$. Já no segundo caso, foi fundamental escolher $f(x) = x^2 + 1$.

Se existisse um número finito de primos da forma $ak + b$, digamos $p_1, p_2, \dots, p_t$ e se existisse tal f com a propriedade de que, para m suficientemente grande, $f(m)$ sempre possui algum fator da forma $ak + b$, poderíamos tomar

$$N = f((p_1 p_2 \dots p_t)^\ell),$$

com ℓ suficientemente grande de modo que $N > 1$. Pela propriedade de f , concluiríamos que N deve possuir algum fator primo p_j . Dessa forma, lembrando que $x - y \mid f(x) - f(y)$, concluímos que p_j também divide $f((p_1 p_2 \dots p_k)^\ell) - f(0) = N - f(0)$ e, portanto, p_j divide $f(0)$. Isso em princípio não necessariamente produz um absurdo, mas se encontrarmos f tal que $f(0) = 1$, resolvemos nosso problema chegando a uma contradição.

Uma outra opção seria encontrar f tal que, para m suficientemente grande, todos os fatores primos de $f(m)$ sejam congruentes a b módulo a , à exceção, possivelmente, de uma quantidade finita de primos, como ocorre em $f(x) = x^2 + 1$, para o caso $4k + 1$. De fato, tomando $m_\ell = (P p_1 p_2 \dots p_t)^\ell$, em que P é o produto dos primos que são possíveis exceções, observe que, para ℓ suficientemente grande, os expoentes da fatoração em primos de $f(m_\ell)$ estão limitados pelo expoente do termo independente $f(0)$ (podemos supor $f(0) \neq 0$, tomando f irredutível em $\mathbb{Z}[x]$). Isso significa que a sequência (a_ℓ) definida por $a_\ell = |f(m_\ell)|$ é limitada. Porém, para f não constante e ℓ arbitrariamente grande, ela deveria “explodir”.

A principal dificuldade dessas abordagens reside, em geral, na construção de polinômios com as propriedades desejadas. Ainda assim, essa ideia pode ser explorada em outros contextos. Encerramos a discussão apresentando um caso particularmente interessante em que tal abordagem é possível, a saber, a existência de infinitos primos da forma $nk + 1$, para um inteiro positivo fixo n . A demonstração utiliza a noção de *polinômios ciclotômicos*. Para saber mais a respeito, veja [4].

Teorema 4. *Seja n um inteiro positivo. Existem infinitos números primos da forma $nk + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$.*

Prova. Suponha que haja um número finito de primos congruentes a 1 módulo n e sejam $p_1, p_2, \dots, p_k$ estes primos. Defina $a = (np_1 p_2 \dots p_k)^\ell$. Para definir o polinômio f , precisaremos recorrer aos polinômios ciclotômicos. Seja $\phi_n(x)$ o n -ésimo polinômio

ciclotômico. Vamos mostrar que $\phi_n(a)$ possui um fator primo congruente a 1 módulo n . Isso produz a contradição desejada, pois argumentando como anteriormente, se q é um fator de $\phi_n(a)$ congruente a 1 módulo n , teremos que $q \mid a$, e, como $a = a - 0 \mid \phi_n(a) - \phi_n(0)$, concluímos que $q \mid \phi_n(0)$, porém sabemos que $|\phi_n(0)| = 1$.

Na verdade, vamos mostrar algo mais forte: todo fator primo de $\phi_n(a)$ é congruente a 1 módulo n . Observe primeiramente que podemos tomar ℓ suficientemente grande de modo que $|\phi_n(a)| > 1$, para garantir que $\phi_n(a)$ tem pelo menos um fator primo. Seja então q um fator primo de $\phi_n(a)$. Sabemos das propriedades de polinômios ciclotômicos que

$$\prod_{d \mid n} \phi_d(x) = x^n - 1.$$

Em particular, para $x = a$, temos que $q \mid a^n - 1$ e então, para mostrar que q é congruente a 1 módulo n , é suficiente verificar que $\text{ord}_q(a) = n$, pois, como pelo teorema de Fermat temos $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$, segue que $q \equiv 1 \pmod{n}$.

Suponha que $\text{ord}_q(a) = h \neq n$. Como $q \mid a^n - 1$, temos que $h \mid n$. Logo, a equação anterior implica que $x^n - 1 = (x^h - 1)\phi_n(x)p(x)$ para algum polinômio $p(x)$. Analisando módulo q , podemos escrever $x^n - a^n \equiv (x^h - a^h)\phi_n(x)p(x) \pmod{q}$. Pela fatoração única em $\mathbb{Z}_q$, podemos cancelar um fator $(x - a)$ em ambos os lados, obtendo

$$\begin{aligned} & x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1} \\ & \equiv (x^{h-1} + x^{h-2}a + \dots + xa^{h-2} + a^{h-1})\phi_n(x)p(x) \pmod{q}. \end{aligned}$$

Fazendo $x = a$ e lembrando que $q \mid \phi_n(a)$, concluímos que $na^{n-1} \equiv 0 \pmod{q}$, um absurdo, pois $q \mid a^n - 1$ e $n \mid a$, de modo que $\text{mdc}(na^{n-1}, q) = 1$. Isso conclui a demonstração. $\square$

Fatores Primos de uma Sequência

Uma forma alternativa e bastante útil de interpretar as ideias anteriores consiste em evitar o argumento por contradição, isto é, em vez de supor que há apenas um número finito de primos de uma dada forma, buscamos construir explicitamente uma sequência (a_n) com a seguinte propriedade: para cada termo a_n , existe um primo $p_n \equiv b \pmod{a}$ tal que $p_n \mid a_n$ e $p_n \notin \{p_1, \dots, p_{n-1}\}$. Dessa forma, garantimos a produção sucessiva de novos primos da forma desejada.

Uma maneira natural de construir tal sequência é por meio de uma recorrência adequada do tipo

$a_{n+1} = f(a_n)$. Por exemplo, na demonstração do caso $4k + 1$, pode-se considerar a recorrência

$$a_{n+1} = (a_1 \cdots a_n)^2 + 1.$$

Por indução, nota-se facilmente que $a_{n+1} = a_n^3 - a_n^2 + 1$, com $a_1 = 5$. Dessa forma, teríamos $f(x) = x^3 - x^2 + 1$.

Diversas questões podem ser formuladas a respeito dos fatores primos de sequências de inteiros. Em muitos casos, é possível caracterizá-los, especialmente para sequências definidas por recorrências do tipo $a_{n+1} = f(a_n)$, em que f é um polinômio bem compreendido.

Outra questão natural consiste em determinar se o conjunto dos divisores primos dos termos da sequência é infinito. Um resultado clássico relacionado a esse problema é o *teorema de Schur*.

Teorema 5. (Schur) *Seja $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ um polinômio não constante. Então o conjunto dos fatores primos da sequência (a_n) , definida por $a_n = P(n)$ é infinito.*

Prova. Suponha que exista apenas um número finito de primos que dividem algum termo da sequência e sejam $p_1, p_2, \dots, p_k$ tais primos. Se $P(0) = 0$, então $n \mid P(n)$ e o resultado é trivial. Suponha então $P(0) = m \neq 0$ e defina $n_\ell = (p_1 p_2 \cdots p_k)^\ell$, com $\ell > \max\{v_{p_1}(m), \dots, v_{p_k}(m)\}$. Observe que $v_{p_i}(a_{n_\ell}) = v_{p_i}(m)$, o que implica que $|a_{n_\ell}| \leq m$, já que os fatores primos de a_{n_ℓ} pertencem ao conjunto $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Mas tomando ℓ arbitrariamente grande, como P é não constante, $|P(n_\ell)| = |a_{n_\ell}|$ fica eventualmente maior que m , um absurdo. $\square$

Outro resultado relacionado é o *teorema de Kobayashi*.

Teorema 6. (Kobayashi) *Seja (x_n) uma sequência de inteiros positivos ilimitada cujo conjunto dos divisores primos é finito. Então, para todo inteiro $y \neq 0$, o conjunto dos fatores primos da sequência $(x_n + y)$ é infinito.*

Sua demonstração original recorre a ferramentas de geometria algébrica. Entretanto, existe uma abordagem alternativa baseada no *teorema de Thue*.

Teorema 7. (Thue) *Seja $d \geq 3$ e $k \in \mathbb{Z}$. Se f é um polinômio homogêneo irredutível de grau d , então existe uma quantidade finita de soluções inteiras para a equação $f(x, y) = k$.*

Embora o teorema de Thue ainda não seja elementar por utilizar teoria de aproximações diofantinas, ele permite uma prova relativamente simples do teorema de Kobayashi. Finalizamos a seção apresentando tal demonstração.

Prova do teorema de Kobayashi. Escreva $a_n = ax^3$ e $a_n + t = by^3$, com a, b livre de cubos. Se (a_n) e $(a_n + t)$ possuem uma quantidade finita de divisores primos, então há uma quantidade finita de possibilidades para a e b , de modo que há uma quantidade finita de equações da forma $by^3 - ax^3 = t$. Mas então, pelo teorema de Thue, temos uma quantidade finita de soluções para essas equações e, em particular, uma quantidade finita de possibilidades para x , o que contradiz o fato de (a_n) ser ilimitada. $\square$

Exercícios

Problema 1. (OBM 2016 - N2) Seja $a_0 = a > 1$ um inteiro e, para $n \geq 0$, defina $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$. Mostre que o conjunto dos divisores primos dos termos da sequência a_n é infinito.

Problema 2. (IMO SL 2009) Seja f uma função não-constante dos inteiros positivos nos inteiros positivos tal que $a - b$ divide $f(a) - f(b)$ para quaisquer inteiros positivos a, b distintos. Prove que existem infinitos números primos p tais que p divide $f(c)$ para algum inteiro positivo c .

Problema 3. (OIMU 2003) Prove que se $P(x)$ é um polinômio não constante com coeficientes inteiros, então existe n inteiro tal que $P(n)$ tem mais de 2003 fatores primos distintos.

Problema 4. (Ibero 2019) Sejam $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ inteiros positivos e P um polinômio com coeficientes inteiros tal que, para todo o inteiro positivo n , $P(n)$ divide $a_1^n + a_2^n + \cdots + a_{2019}^n$. Prove que P é um polinômio constante.

Problema 5. (Irã 2011) Seja $P(x)$ um polinômio não nulo com coeficientes inteiros. Prove que existem infinitos primos q tais que q divide $2^n + P(n)$ para algum n natural.

Problema 6. (TST Irã 2024) Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números naturais tal que todo número primo maior que 1402 divide algum termo da sequência. Prove que o conjunto dos divisores primos dos termos da sequência $\{b_n\}$, definida por $b_n = a_1 a_2 \cdots a_n - 1$, é infinito.

Problema 7. (OBMU 2017) Fixados os inteiros positivos a e b , mostre que o conjunto dos divisores primos dos termos da sequência $a_n = a \cdot 2017^n + b \cdot 2016^n$ é infinito.

Sobre a Distribuição dos Primos

Nesta seção vamos apresentar demonstrações para o *postulado de Bertrand* e para provar o *teorema de Chebyshev*. A prova do postulado de Bertrand apresentada é devida a Erdős e os dois lemas utilizados também servem para provar o teorema de Chebyshev.

No que segue, todos os logaritmos são na base natural. Sabendo da existência de infinitos números primos, torna-se natural procurar entender a respeito da *distribuição* dos primos nos inteiros positivos. Mais precisamente, dado um inteiro positivo n , definindo

$\pi(n)$ como a quantidade de números primos no conjunto $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, seria interessante entender o comportamento assintótico desta função. O teorema de Chebyshev responde essa pergunta, provando que $\pi(n) = \Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$.

Teorema 8. (Chebyshev) *Existem constantes positivas $c < C$ tais que para todo $x \geq 2$ vale*

$$c \frac{x}{\log x} < \pi(x) < C \frac{x}{\log x}.$$

Outra pergunta bastante natural é a respeito do comportamento da quantidade de números primos em um certo intervalo $[f(n), g(n)]$. Por exemplo, como consequência do teorema de Chebyshev, podemos facilmente concluir que a quantidade de primos no intervalo $[n, an]$, com $a > 1$ é pelo menos

$$\pi(an) - \pi(n) \geq c \frac{an}{\log(an)} - C \frac{n}{\log n} = (ca - C + o(1)) \frac{n}{\log n}.$$

Logo, quando $a > C/c$, conseguimos muitos primos em intervalos da forma $[n, an]$ para n suficientemente grande. Na demonstração apresentada, teremos $C = 5 \log 2$ e $c = \frac{\log 2}{2}$, o que implica $a > 10$. Mas para valores menores de a , em princípio sequer sabemos se podemos garantir a existência um primo no intervalo para n grande. O postulado de Bertrand responde essa pergunta quando $a = 2$.

Teorema 9. (Postulado de Bertrand) *Seja n um inteiro positivo. Existe um primo $p \in [n, 2n]$.*

Antes de provar os Teoremas 8 e 9, vamos enunciar dois lemas necessários para prová-los.

Lema 1. *Sejam $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ e p um número primo. Seja θ_p o inteiro tal que $p^{\theta_p} \leq 2n < p^{\theta_p+1}$. Então¹*

$$v_p \left(\binom{2n}{n} \right) \leq \theta_p.$$

Em particular, se $p > \sqrt{2n}$, então o expoente de p em $\binom{2n}{n}$ é 1, e se $\frac{2n}{3} < p < n$, então p não divide $\binom{2n}{n}$.

Prova. Observe que

$$\begin{aligned} v_p \left(\binom{2n}{n} \right) &= v_p((2n)!) - 2v_p(n!) \\ &= \sum_{i=1}^{\theta_p} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \right) \leq \theta_p, \end{aligned}$$

pois cada parcela é sempre 0 ou 1. Se $p > \sqrt{2n}$, temos que $\theta_p = 1$ e o resultado segue. Além disso, se $\frac{2n}{3} < p < n$, é fácil ver que todas as parcelas são 0 e então p não divide $\binom{2n}{n}$. $\square$

¹ $v_p(n)$ é o maior número m tal que p^m divide n . (N. do E.)

Lema 2. *Para todo inteiro positivo n , temos*

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ primo}}} p \leq 4^n.$$

Prova. A prova segue por indução em n . Para n pequeno o resultado é claro. Suponha válido para todo $k < n$. Se n é par, temos que

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ primo}}} p = \prod_{\substack{p \leq n-1 \\ p \text{ primo}}} p \leq 4^{n-1} < 4^n.$$

Suponha então n ímpar e seja $n = 2m + 1$. Observe que

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ primo}}} p &= \prod_{\substack{p \leq m+1 \\ p \text{ primo}}} p \cdot \prod_{\substack{m+2 \leq p \leq 2m+1 \\ p \text{ primo}}} p \\ &\leq 4^{m+1} \binom{2m+1}{m+1} \leq 4^{m+1} 2^{2m} = 4^n. \end{aligned}$$

A primeira desigualdade segue da hipótese de indução e do fato de todos os primos p entre $m+2$ e $2m+1$ dividirem $\binom{2m+1}{m+1}$. A cota no binomial segue de $\sum_{i=1}^{2m+1} \binom{2m+1}{i} = 2^{2m+1}$ e de $\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m}$. $\square$

Com esses dois resultados em mãos, podemos provar os Teoremas 8 e 9. Ressaltamos que a prova do teorema de Bertrand apresentada é devida a Paul Erdős.

Prova do Teorema 9. Suponha que exista $n \geq 2$ para o qual não há primos no intervalo $[n, 2n]$. Pelas Afirmções 1 e 2, junto com o fato de que até $\sqrt{2n}$ temos no máximo $\sqrt{2n}/2 - 1$ primos e que $p^{\theta_p} \leq 2n$, temos que

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &\leq \prod_{\substack{p \leq \sqrt{2n} \\ p \text{ primo}}} p^{\theta_p} \cdot \prod_{\substack{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2n}{3} \\ p \text{ primo}}} p \\ &= \prod_{\substack{p \leq \sqrt{2n} \\ p \text{ primo}}} p^{\theta_p} \cdot \prod_{\substack{p \leq \frac{2n}{3} \\ p \text{ primo}}} p \leq (2n)^{\sqrt{2n}/2-1} \cdot 4^{2n/3}. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela relação de Stifel, temos que

$$\begin{aligned} n \binom{2n}{n} &= n \binom{2n-1}{n} + n \binom{2n-1}{n-1} \\ &> (1+1)^{2n-1}, \end{aligned}$$

o que implica $\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n-1}}{n}$. Concluimos então que

$$\frac{2^{2n-1}}{n} < (2n)^{\sqrt{2n}/2-1} \cdot 4^{2n/3} \iff 2^{2n/3} < (2n)^{\sqrt{n}/2}.$$

Tomando logaritmo na base 2, ficamos com a desigualdade $2\sqrt{2n} < 3\log_2(n) + 3$, que é falsa para todo $n \geq 50$. Portanto, para finalizar, basta verificar até $2 \cdot 50 = 100$ e não é difícil observar que os primos 2, 5, 11, 23, 47, 79, 101 cobrem todos os intervalos da forma $[n, 2n]$ com $1 \leq n \leq 50$. $\square$

Agora vejamos a demonstração do teorema de Chebyshev.

Prova do Teorema 8. Basta mostrar uma cota inferior do tipo

$$\pi(x) \geq c \frac{x}{\log x}$$

para $x = 2n$, pois $\pi(2n-1) = \pi(2n)$ e $\frac{x}{\log x}$ é crescente para $x \geq 3$. Vamos cotar a quantidade de números primos menores ou iguais a $2n$ pelos primos que dividem $\binom{2n}{n}$. Pela Afirmação 1, temos que

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &\leq \prod_{\substack{p \leq 2n \\ p \text{ primo}}} p^{\theta_p} \leq (2n)^{\pi(2n)} \\ \Rightarrow \pi(2n) &\geq \frac{\log \binom{2n}{n}}{\log(2n)} \geq \frac{n \log 2}{\log(2n)}, \end{aligned}$$

em que a última desigualdade segue de

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \binom{n}{0}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 \\ &\geq \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\pi(2n) \geq \frac{n \log 2}{\log(2n)} \Rightarrow \pi(x) \geq \frac{\log 2}{2} \frac{x}{\log x}.$$

Resta provarmos a cota superior. Veja que também temos

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 < \left(\binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} \right)^2 = 2^{2n}.$$

Portanto, em particular, o produto dos primos entre n e $2n$ é menor que 2^{2n} e então

$$\begin{aligned} n^{\pi(2n) - \pi(n)} &< \prod_{\substack{n < p \leq 2n \\ p \text{ primo}}} p < 2^{2n} \\ \Leftrightarrow \pi(2n) - \pi(n) &< \frac{2n \log 2}{\log n}, \end{aligned}$$

o que implica, por indução, que

$$\pi(2^{k+1}) \leq \frac{5 \cdot 2^k}{k}.$$

Finalmente, se $2^k < x \leq 2^{k+1}$, temos que

$$\pi(x) \leq \pi(2^{k+1}) \leq \frac{5 \cdot 2^k}{k} \leq 5 \log 2 \frac{x}{\log x}. \quad \square$$

Para concluir esta seção, apresentamos o celebrado teorema dos números primos, provado independentemente por Jacques Hadamard e Charles Jean de la Vallée Poussin, em 1896. Sua demonstração usual também utiliza variáveis complexas e não será apresentada aqui.

Teorema 10. (*Teorema dos Números Primos*) Tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1.$$

Em outras palavras, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que se $n \geq n_0$, então

$$(1 - \varepsilon) \frac{n}{\log n} < \pi(n) < (1 + \varepsilon) \frac{n}{\log n}.$$

Em particular, para todo $n \geq n_0$, temos $\Theta(\frac{n}{\log n})$ primos no intervalo $[n, (1 + \delta)n]$, com $\delta > 0$ fixado.

A Soma dos Inversos dos Primos

Nesta seção apresentaremos uma demonstração sobre o fato bastante útil de que a série da soma dos inversos dos primos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$$

é divergente.

Antes de apresentarmos o argumento, será útil discutir a demonstração de Erdős para a infinitude dos números primos. Essa prova baseia-se, essencialmente, na noção de densidade nos inteiros positivos, cuja ideia pode ser descrita da seguinte forma: dado um inteiro positivo M , estimamos, em função de M , quantos números no intervalo $[1, M]$ satisfazem determinada propriedade. Ao fazer $M \rightarrow \infty$, buscamos compreender se há infinitos inteiros que a satisfazem (ou, alternativamente, que não a satisfazem).

Segunda prova do Teorema 1. Suponha que a quantidade de primos seja finita e sejam $p_1, p_2, \dots, p_k$. Fixado um inteiro M , escreva cada inteiro $m \in [1, M]$ na forma $m = ax^2$, com a livre de quadrados. Observe que para a temos 2^k possibilidades, pois cada p_i pode aparecer ou não na fatoração dele. Por outro lado, para x temos no máximo $\sqrt{M}$ possibilidades. Dessa forma, concluímos que $2^k \sqrt{M} \geq M$, o que equivale a $2^{2k} \geq M$. Mas como M é qualquer, tomando $M > 2^{2k}$, temos um absurdo. $\square$

Com a ideia da prova anterior em mente, podemos agora apresentar a demonstração de Paul Erdős de que a soma dos inversos dos primos diverge.

Teorema 11. A série

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$$

diverge.

Prova. Suponha que a série converge. Então existe $N > 0$ tal que

$$\sum_{\substack{p \geq N \\ p \text{ primo}}} \frac{1}{p} < \frac{1}{2}.$$

Considere a partição dos naturais $\mathbb{N} = A \cup B$, em que $B = \mathbb{N} \setminus A$ e

$$A = \{n \in \mathbb{N} : p \mid n, p \text{ primo} \Rightarrow p < N\}.$$

Seja $M \in \mathbb{N}$ e $n \leq M$, note que o expoente de um fator primo na fatoração de n é no máximo $\frac{\log M}{\log 2}$. Portanto, a quantidade de inteiros positivos que utilizam apenas fatores menores que N é

$$|A \cap [1, n]| \leq \left(1 + \frac{\log M}{\log 2}\right)^{\pi(N)}.$$

Por outro lado, todo elemento de B possui um fator primo maior ou igual a N e então

$$|B \cap [1, M]| \leq \sum_{\substack{p \geq N \\ p \text{ primo}}} \leq M \sum_{\substack{p \geq N \\ p \text{ primo}}} \frac{1}{p} < \frac{M}{2}.$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} M &= |A \cap [1, M]| + |B \cap [1, M]| \\ &< \left(1 + \frac{\log M}{\log 2}\right)^{\pi(N)} + \frac{M}{2}, \end{aligned}$$

e então

$$\frac{M}{2} < \left(1 + \frac{\log M}{\log 2}\right)^{\pi(N)},$$

que é claramente absurdo para M suficientemente grande. $\square$

Exercícios

Problema 8. (IMC 2012) O conjunto dos inteiros positivos n tais que $n! + 1$ divide $(2012n)!$ é finito ou infinito?

Problema 9. (IMO SL 2007) Encontre todas as funções sobrejetivas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tais que, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ e para todo primo p , o número $f(m+n)$ é divisível por p se, e somente se, $f(m) + f(n)$ é divisível por p .

Problema 10. Sejam k e n inteiros positivos com $n > 2^k$. Prove que os k primeiros números que são maiores do que n e primos relativos com $n!$ são primos.

Problema 11. (Sylvester-Schur) Sejam $n, k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $n \geq 2k$. Então $\binom{n}{k}$ tem um fator primo $p > k$.

Problema 12. (Erdős-Pálffy) Sejam a e b inteiros positivos tais que quando os dividimos por qualquer primo p , o resto de a é sempre menor ou igual ao resto de b . Prove que $a = b$.

Problema 13. Sejam (p_n) a sequência dos primos. Prove que

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \cdot \dots = 0.$$

Problema 14. Seja $\lambda > 1$ um número real. Denote por p_n o n -ésimo número primo em ordem crescente. Prove que a sequência $(\lfloor \lambda p_n \rfloor)$ possui infinitos divisores primos.

Problema 15. (Rioplatense 1999) Sejam $p_1, p_2, \dots, p_k$ k números primos distintos. Consideramos todos os inteiros positivos que utilizam apenas esses primos (não necessariamente todos) em sua fatoração em primos e organizamos esses números em ordem crescente, formando uma sequência infinita $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$. Prove que, para todo número c , existe um n tal que $a_{n+1} - a_n > c$.

Problema 16. (CIIM 2024) Dado um inteiro positivo n , seja $\varphi(n)$ o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são relativamente primos com n . Determine todos os inteiros positivos k para os quais existem inteiros positivos $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$ tais que

$$\left\lfloor \frac{\varphi(a_1)}{a_1} + \frac{\varphi(a_2)}{a_2} + \dots + \frac{\varphi(a_k)}{a_k} \right\rfloor = 2024.$$

Bibliografia

- [1] David Galvin. Erdos's proof of bertrand's postulate. 2013.
- [2] FB MARTINEZ, CG MOREIRA, N Saldanha, and Eduardo Tengan. Teoria dos números: um passeio com primos e outros números. IMPA, Rio de Janeiro, 5ª edição, 2018.
- [3] CJ Quines. Sledgehammers in number theory, June 2023. Manuscript.
- [4] Carlo Sanna. A survey on coefficients of cyclotomic polynomials. *Expositiones Mathematicae*, 40(3):469–494, 2022.



Rafael Filipe dos Santos é natural do Rio de Janeiro, formado em Engenharia da Computação pelo Instituto Militar de Engenharia (IME) e mestre em Matemática Pura pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), onde cursa doutorado em Combinatória. Participou de olimpíadas de matemática, com medalha de bronze na IMO e duas de ouro na IMC. Hoje atua na Comissão Nacional de Olimpíadas da OBM.

PROBLEMA

O Jogo do EL e Outros Problemas

Por Yure Carneiro e Samuel Feitosa

Soluções da Edição Anterior

Problemas Universitários

Problema 1. Mostre que para qualquer primo $p > 17$, o número

$$p^{32} - 1$$

é divisível por 16320.

Solução (Solução de Vinícius Leite).

1º Método: Pequeno Teorema de Fermat e Fatoração

A fatoração em primos de 16320 é $2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$. Como os fatores são potências de primos distintos, eles são coprimos entre si. Logo, basta demonstrar que $p^{32} - 1$ é divisível por cada um deles individualmente.

Divisibilidade por 3, 5 e 17:

Pelo Pequeno Teorema de Fermat, se q é um número primo e $\text{mdc}(a, q) = 1$, então $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Como $p > 17$ é primo, ele é coprimo com 3, 5 e 17.

Aplicando o teorema:

- Para $q = 3$: $p^2 \equiv 1 \pmod{3} \implies (p^2)^{16} \equiv 1^{16} \pmod{3} \implies p^{32} \equiv 1 \pmod{3}$.
- Para $q = 5$: $p^4 \equiv 1 \pmod{5} \implies (p^4)^8 \equiv 1^8 \pmod{5} \implies p^{32} \equiv 1 \pmod{5}$.
- Para $q = 17$: $p^{16} \equiv 1 \pmod{17} \implies (p^{16})^2 \equiv 1^2 \pmod{17} \implies p^{32} \equiv 1 \pmod{17}$.

Isso garante que 3, 5 e 17 dividem $p^{32} - 1$.

Divisibilidade por 2^6 :

Fatorando a expressão recursivamente por diferença de quadrados, obtemos

$$p^{32} - 1 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)(p^4 + 1)(p^8 + 1)(p^{16} + 1).$$

Como p é um primo maior que 17, p é ímpar. Os termos $(p - 1)$ e $(p + 1)$ são inteiros pares consecutivos. Um deles é necessariamente múltiplo de 2 e o outro é múltiplo de 4. O produto $(p - 1)(p + 1)$, portanto, é múltiplo de 8 (ou seja, divisível por 2^3).

Os quatro termos restantes da forma $(p^k + 1)$ representam a soma de uma potência de base ímpar com 1, resultando sempre em números pares. Cada um desses quatro parênteses contribui com, pelo menos, um fator 2, totalizando um fator de 2^4 .

Multiplicando todas as contribuições, garantimos que $p^{32} - 1$ é múltiplo de $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Sendo divisível por 2^7 , é trivialmente divisível por 2^6 .

Conclui-se que $16320 \mid (p^{32} - 1)$.

2º Método: Função de Carmichael

O problema equivale a provar a congruência $p^{32} \equiv 1 \pmod{16320}$. Para isso, utilizaremos a Função de Carmichael, denotada por $\lambda(n)$, que estabelece o menor expoente estritamente positivo tal que $a^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ para todo a coprimo com n . Sabendo que $16320 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$, o valor de $\lambda(16320)$ é dado pelo mínimo múltiplo comum das funções de seus fatores primos:

$$\lambda(16320) = \text{mmc}(\lambda(2^6), \lambda(3), \lambda(5), \lambda(17)).$$

Pelas propriedades da função:

- Para potências de base 2 com expoente $k \geq 3$: $\lambda(2^k) = 2^{k-2}$. Logo, $\lambda(2^6) = 2^4 = 16$.

- Para primos ímpares q : $\lambda(q) = q - 1$. Logo, $\lambda(3) = 2$, $\lambda(5) = 4$ e $\lambda(17) = 16$.

Substituindo esses valores, encontramos o expoente universal do grupo multiplicativo:

$$\lambda(16320) = \text{mmc}(16, 2, 4, 16) = 16.$$

Isto significa que, para todo inteiro coprimo com 16320, a elevação à 16^{a} potência resulta em congruência a 1. Como $p > 17$ é primo, temos que $\text{mdc}(p, 16320) = 1$. Portanto:

$$p^{16} \equiv 1 \pmod{16320}.$$

Elevando ambos os membros da congruência ao quadrado, obtemos diretamente o resultado exigido pela questão:

$$(p^{16})^2 \equiv 1^2 \pmod{16320} \implies p^{32} \equiv 1 \pmod{16320}.$$

Problema 2. Sejam c e x_0 números reais positivos fixados. Defina a sequência

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}} \right), \text{ para } n \geq 1.$$

Prove que a sequência converge e que o limite é $\sqrt{c}$.

Solução (Solução de Yan Lima Machado). A princípio, pela desigualdade das médias, tem-se que:

$$\frac{x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}}}{2} \geq \sqrt{x_{n-1} \cdot \frac{c}{x_{n-1}}}.$$

$$\Leftrightarrow x_n \geq \sqrt{c}.$$

Portanto, tem-se que a sequência é limitada inferiormente por $\sqrt{c}$.

Desenvolvendo a expressão dada pelo enunciado, tem-se que:

$$x_n = \frac{x_{n-1}^2 + c}{2x_{n-1}}.$$

Fazendo $x_n - x_{n-1}$:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1}^2 + c}{2x_{n-1}} - \frac{2x_{n-1}^2}{2x_{n-1}}.$$

$$x_n - x_{n-1} = \frac{c - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}}.$$

$$x_n - x_{n-1} = - \left[\frac{(x_{n-1} + \sqrt{c})(x_{n-1} - \sqrt{c})}{2x_{n-1}} \right].$$

Como $x_{n-1} > 0$, $x_{n-1} + \sqrt{c} > 0$.

Ademais, como visto no início da solução, $x_{n-1} \geq \sqrt{c}$, daí $x_{n-1} - \sqrt{c} \geq 0$.

Logo, $x_n - x_{n-1} \leq 0 \Rightarrow x_n \leq x_{n-1}$.

Como a sequência é limitada inferiormente por $\sqrt{c}$ e decrescente a partir do primeiro termo $n \geq 1$, ela converge.

Como ela converge, $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} x_{n-1} = L > 0$.

Daí, tem-se que

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{c}{L} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2L = L + \frac{c}{L}$$

$$\Leftrightarrow 2L^2 = L^2 + c$$

$$\Leftrightarrow L^2 = c$$

$$\Leftrightarrow L = \sqrt{c}.$$

Portanto, está mostrado que o limite da sequência é $\sqrt{c}$.

Curiosidade: A questão apresenta o método de Herão, também conhecido como método babilônico, um algoritmo utilizado para calcular aproximações de raízes quadradas. Ele homenageia o matemático grego Herão de Alexandria, que descreveu o procedimento em seus escritos. O método começa com uma estimativa inicial para a raiz desejada e, em seguida, utiliza uma fórmula iterativa para obter aproximações cada vez melhores. Por essa razão, ele é considerado um dos métodos numéricos mais antigos e importantes da história da matemática.

Problema 3. Calcule o determinante da matriz quadrada de ordem n , $A = (a_{ij})_{ij}$, definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{se } i \neq j \\ 2, & \text{se } i = j \end{cases}.$$

Solução (Solução de Victor Leite).

Análise dos Casos Iniciais e Formulação da Hipótese

Para começar, testaremos os casos para $n = 1, 2, 3$ a fim de identificar um padrão útil para ser explorado.

Para $n = 1$:

$$A_1 = [2] \Rightarrow \det(A_1) = 2$$

Para $n = 2$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = (2)(2) - (-1)(-1) = 3$$

Para $n = 3$:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante pela Regra de Sarrus:

$$\begin{aligned} \det(A_3) &= [(2)(2)(2) + (-1)(-1)(1) + (1)(-1)(-1)] \\ &\quad - [(1)(2)(1) + (-1)(-1)(2) + (2)(-1)(-1)] \\ &= [8 + 1 + 1] - [2 + 2 + 2] \\ &= 10 - 6 = 4 \end{aligned}$$

A sequência de determinantes (2, 3, 4) para matrizes de ordem (1, 2, 3) sugere uma progressão aritmética. Formulamos a seguinte hipótese para o caso geral de ordem n :

$$\det(A_n) = n + 1$$

Demonstração via Teorema de Jacobi

Para provar que $\det(A_n) = n + 1$ para qualquer $n \geq 1$, aplicaremos o Teorema de Jacobi:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n ($n \geq 2$). Se a uma fila (linha ou coluna) de A for adicionado um múltiplo escalar de outra fila paralela a ela, obtemos uma matriz B tal que

$$\det(A) = \det(B).$$

Em outras palavras: somar a uma linha (ou coluna) qualquer múltiplo de outra linha (ou coluna) não altera o valor do determinante. Isso nos ajudará a simplificar o cálculo do determinante da matriz genérica A_n .

A representação expandida da matriz original A_n é

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ -1 & 2 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-2} \\ 1 & -1 & 2 & -1 & \cdots & (-1)^{n-3} \\ -1 & 1 & -1 & 2 & \cdots & (-1)^{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & (-1)^{n-3} & (-1)^{n-4} & \cdots & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Operações nas Linhas:

Note que a presença de vários termos 1 e -1 alternados nos permite zerar grande parte da matriz simplesmente somando ou subtraindo as linhas entre si,

logo, para toda linha L_k exceto a primeira, aplicaremos a transformação $L_k \leftarrow L_k + (-1)^k L_1$. Note que $(-1)^k$ nos permite alternar entre soma e subtração com base na paridade da linha, resolvendo a alternância entre 1 e -1 e transformando a maior parte em 0, de brinde transformando (quase) todos os elementos da diagonal principal em 1.

Para o elemento da diagonal ($j = k$):

$$a'_{kk} = 2 + (-1)^k (-1)^{k-1} = 2 - (-1)^{2k} = 2 - 1 = 1.$$

Para a primeira coluna ($j = 1$):

$$a'_{k1} = (-1)^{k-1} + (-1)^k (2) = -(-1)^k + 2(-1)^k = (-1)^k.$$

Após essas operações, a matriz assume a forma A'_n :

$$A'_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2. Operações nas Colunas:

Seria muito agradável zerar todos os elementos da coluna 1 (exceto o primeiro), pois isso tornaria a matriz triangular superior. Note que, novamente, realizando somas e subtrações entre a primeira coluna e as demais colunas, podemos usar os elementos 1 da diagonal principal para zerar os elementos da primeira coluna. Para isso, aplicamos a transformação $C_1 \leftarrow C_1 - \sum_{k=2}^n (-1)^k C_k$. Note que, novamente, o $(-1)^k$ permite que alternemos entre soma e subtração, resolvendo a alternância entre 1 e -1 e zerando todos os elementos da primeira coluna, exceto o primeiro. Como as colunas C_k ($k \geq 2$) possuem apenas o elemento 1 na linha k e 0 nas demais posições abaixo da primeira linha, essa operação zera completamente todos os a'_{k1} para $k \geq 2$. O elemento a_{11} sofre a seguinte alteração:

$$\begin{aligned} a''_{11} &= 2 - \sum_{k=2}^n (-1)^k a_{1k} \\ &= 2 - \sum_{k=2}^n (-1)^k (-1)^{k-1} \\ &= 2 - \sum_{k=2}^n (-1)^{2k-1}. \end{aligned}$$

Como $2k - 1$ é sempre um número ímpar, $(-1)^{2k-1} = -1$. Logo

$$a''_{11} = 2 - \sum_{k=2}^n (-1) = 2 + \sum_{k=2}^n 1 = 2 + (n - 1) = n + 1.$$

A matriz final A''_n torna-se estritamente triangular superior:

$$A''_n = \begin{bmatrix} n+1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Como o determinante de uma matriz triangular é dado pelo produto dos elementos de sua diagonal principal,

$$\det(A_n) = (n+1) \cdot \prod_{k=2}^n 1 = n+1.$$

Isso conclui a demonstração formal da hipótese.

Solução (Solução de Vinícius Mello).

A matriz A é uma matriz pode ser escrita como

$$A = I + u_n u_n^T,$$

onde I é a matriz identidade de ordem n e $u_n^T = [1 \ -1 \ 1 \ -1 \ \dots \ (-1)^{n-1}]$, ou seja, u_n é uma matriz coluna cujas entradas alternam entre 1 e -1. Por exemplo, para $n = 4$ temos

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ -1 \ 1 \ -1). \end{aligned}$$

Portanto, pela conhecida identidade

$$\det(I + uv^T) = 1 + v^T u,$$

aplicando-a com $u = u_n$ e $v = u_n$, temos

$$\det(A) = \det(I + u_n u_n^T) = 1 + u_n^T u_n = 1 + n.$$

Se a identidade $\det(I + uv^T) = 1 + v^T u$ não for tão conhecida assim, podemos demonstrá-la rapidamente com a seguinte ideia: se $u = 0$, não há nada a demonstrar. Caso contrário, é fácil ver que u é um autovetor de $I + uv^T$ com autovalor $1 + v^T u$, pois

$$(I + uv^T)u = u + u(v^T u) = (1 + v^T u)u.$$

Além disso, se x é um vetor tal que $v^T x = 0$, então $(I + uv^T)x = x$, ou seja, x é um autovetor de $I + uv^T$

com autovalor 1. Como o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ tem dimensão n , podemos escolher $n-1$ vetores linearmente independentes $x_1, \dots, x_{n-1}$ tais que $v^T x_i = 0$ para todo i . Assim, os autovalores de $I + uv^T$ são $1 + v^T u$ e 1 (com multiplicidade $n-1$). Portanto, como o determinante de uma matriz é o produto de seus autovalores, temos

$$\det(I + uv^T) = (1 + v^T u) \cdot 1^{n-1} = 1 + v^T u.$$

Problema 4. Considere uma esfera de raio unitário centrada na origem de um sistema de coordenadas xyz . Seja C um pentágono regular inscrito na esfera e contido no plano xy . Determine a área da região contida na esfera cuja projeção com respeito à terceira coordenada coincide com a região delimitada por C .

Solução: Considere a projeção no plano xy dada pela região poligonal limitada pelo pentágono na figura abaixo.

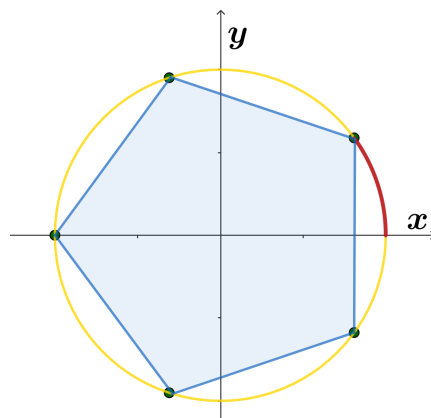


Figura 1: Projeção no plano xy .

Os pontos da esfera que são projetados nessa região (aqui contando as partes superior e inferior da esfera que se projetam na região poligonal) formam uma região cuja área pode ser calculada através de

$$A = 4\pi - 5 \cdot A_{\text{revolução}}$$

onde: 4π é a área da superfície esférica de raio 1 ($4\pi R^2$), e $A_{\text{revolução}}$ é a área da superfície de revolução obtida pela rotação da curva que pode ser parametrizada por

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = \cos(t), \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{5}$$

(cujo traço é o arco em destaque na figura), em torno

do eixo x . Temos que

$$\begin{aligned} A_{\text{revolução}} &= 2\pi \int_0^{\pi/5} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/5} \sin(t) \sqrt{[-\sin(t)]^2 + [\cos(t)]^2} dt \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/5} \sin(t) dt \\ &= 2\pi \left[-\cos(t) \right]_0^{\pi/5} \\ &= 2\pi(1 - \cos(\pi/5)) = \frac{(3 - \sqrt{5})\pi}{2} \end{aligned}$$

[O fato de que $\cos(\pi/5) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ pode ser obtido usando relações trigonométricas em um triângulo isósceles de ângulos $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ e base 1]. Portanto,

$$A = \frac{8\pi - 5(3 - \sqrt{5})\pi}{2} = \frac{(5\sqrt{5} - 7)\pi}{2}.$$

Problema 5. Seja f diferenciável em $x = a$ com $f(a) \neq 0$. Calcule:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(a + 1/n)}{f(a)} \right]^n.$$

Solução: Basta calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+x)}{f(a)} \right]^{1/x}.$$

Como f é contínua, para x suficientemente pequeno, $f(a+x)$ e $f(a)$ têm o mesmo sinal, e daí segue que

$$\begin{aligned} \log \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+x)}{f(a)} \right)^{1/x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\log \left(\frac{|f(a+x)|}{|f(a)|} \right)^{1/x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log |f(a+x)| - \log |f(a)|}{x}. \end{aligned}$$

A última expressão à direita é a definição da derivada de $\log |f(x)|$ em $x = a$, que sabemos ser igual a $f'(a)/f(a)$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+x)}{f(a)} \right]^{1/x} = e^{f'(a)/f(a)}.$$

Problema 6. Sejam $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ e $P \in \mathbb{C}[X]$ um polinômio não constante tal que $P(0) \neq 0$ e $AB = P(A)$. Prove que a matriz A é invertível e que as matrizes A e B comutam (isto é, que $AB = BA$).

Solução: Podemos escrever $P(X)$ da seguinte forma:

$$P(X) = P(0) + XQ(X),$$

onde $Q \in \mathbb{C}[X]$. Assim segue que

$$P(A) = P(0) \cdot I_n + AQ(A).$$

Agora, como

$$P(A) = AB,$$

temos que

$$AB = P(0) \cdot I_n + AQ(A)$$

e daí $A[B - Q(A)] = P(0)I_n$. Mas,

$$P(0) \neq 0$$

implica que

$$A \cdot \frac{1}{P(0)} [B - Q(A)] = I_n \implies A^{-1} = \frac{1}{P(0)} [B - Q(A)].$$

Logo A é invertível e a expressão acima é a inversa de A . Por outro lado,

$$AB = P(A) \iff B = A^{-1}P(A).$$

Então temos que

$$BA = A^{-1}P(A)A = A^{-1}AP(A) = I_n P(A) = P(A) = AB.$$

Portanto as matrizes A e B comutam.

Problemas de Matemática Elementar

Problema 7. O produto dos números reais positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ é igual a 1. Prove, **sem ser por indução**, que

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

Solução (Solução de Vinícius Leite).

Desigualdade das Médias (MA-MG)

A demonstração utiliza a Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica (MA-MG). Para quaisquer números reais positivos x e y , temos que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \implies x+y \geq 2\sqrt{xy}.$$

Aplicando essa desigualdade individualmente para cada par formado por 1 e a_i (sabendo que $a_i > 0$), construímos o seguinte sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} 1 + a_1 &\geq 2\sqrt{a_1} \\ 1 + a_2 &\geq 2\sqrt{a_2} \\ &\vdots \\ 1 + a_n &\geq 2\sqrt{a_n}. \end{aligned}$$

Como todos os termos em ambos os lados das desigualdades são estritamente positivos, podemos multiplicar as n desigualdades membro a membro sem alterar o sentido da relação:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq (2\sqrt{a_1})(2\sqrt{a_2}) \cdots (2\sqrt{a_n}).$$

Agrupando os n fatores 2 e unificando as raízes no lado direito, obtemos

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}.$$

Por hipótese, o produto de todos os termos a_i é exatamente 1 ($a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$). Substituindo esse valor, a expressão sob a raiz resulta em 1 (elemento neutro da multiplicação):

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n \sqrt{1}.$$

O que demonstra diretamente a tese:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

Problema 8. *Seja A um subconjunto dos números naturais tal que, entre 100 números naturais consecutivos, existe um elemento de A . Prove que podemos encontrar quatro números diferentes a, b, c e d em A tais que $a + b = c + d$.*

Solução (Solução de Victor Leite).

1º Passo: A infinitude do conjunto A

Dado que entre 100 naturais consecutivos existe, ao menos, um elemento de A , podemos concluir que o número de elementos de A equivale, no mínimo, à quantidade de partições de 100 elementos do conjunto dos naturais, que por sua vez é infinito. Logo, podemos afirmar que o conjunto A possui infinitos termos, e podemos escrever $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, com $a_i < a_{i+1}$.

2º Passo: O Princípio da Casa dos Pombos

Provar que $\exists a, b, c, d \in A \mid a + b = c + d$ equivale a provar que para $a, b, c, d \in A$, $a - c = d - b$, o que, por sua vez, equivale a provar que a distância entre a e c equivale à distância entre d e b .

Sabendo que a cada 100 naturais consecutivos existe sempre ao menos um elemento de A , podemos afirmar que em qualquer intervalo fechado do tipo $[a_n, a_n + 100]$ existirão ao menos 2 elementos de A . Logo, a distância máxima possível entre dois elementos consecutivos a_n e a_{n+1} pertencentes ao conjunto A é rigorosamente 100.

Como as distâncias entre elementos consecutivos resultam em números inteiros, todas as distâncias possíveis pertencem ao intervalo $[1, 100]$. Portanto, o número máximo de distâncias distintas entre elementos consecutivos de A é 100.

Para aplicar o Princípio da Casa dos Pombos, analisamos os 202 primeiros elementos de A . Com eles, podemos formar exatamente 101 pares disjuntos de elementos consecutivos:

$$(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{201}, a_{202}).$$

Temos 101 pares gerando 101 medidas de distância. Como existem no máximo 100 valores distintos possíveis para essas distâncias, o Princípio da Casa dos Pombos (Teorema de Dirichlet) garante que, inevitavelmente, ao menos 2 pares disjuntos possuirão exatamente a mesma distância.

Sejam esses pares disjuntos (c, a) e (b, d) , ambos pertencentes a A , tais que a distância do primeiro par seja igual à distância do segundo par:

$$a - c = d - b.$$

Manipulando algebricamente a igualdade, obtemos diretamente:

$$a + b = c + d.$$

Como os dois pares analisados são disjuntos e os elementos de A podem ser dispostos em uma sequência estritamente crescente de naturais, os quatro números a, b, c e d são obrigatoriamente distintos, o que conclui a prova.

Problema 9. *Uma pilha tem 40 pedras. A pilha é dividida em duas partes, depois uma das partes é dividida em duas novamente, etc., até termos 40 pedras separadas (40 pilhas formadas com uma pedra cada). Depois de cada divisão de uma das pilhas em duas menores, escrevemos o produto dos números de pedras nestas duas pilhas em um quadro. Mostre que, no final, a soma de todos os números no quadro será igual a 780.*

Solução: Para mostrar o resultado desejado, vamos analisar o problema de um ponto de vista mais geral, para tentar achar algum padrão que possa ser generalizado e então resolver o caso particular de 40 pedras. Seja n o número de pedras no início da divisão e chamemos de S_n a soma final obtida ao final do processo.

- Para $n = 2$: a única opção de divisão é $2 = 1 + 1$, cujo produto é $S_2 = 1$;
- Para $n = 3$: por simetria, podemos considerar a divisão inicial $3 = 2 + 1$, anotando no quadro o valor 2. Após isso, veja que os próximos números a serem anotados no quadro são os que podem ser gerados começando com 2 pedras. Nesse caso, já sabemos o que ocorre. Assim, ao final teremos a soma $S_3 = 2 + 1 = 3$;
- Para $n = 4$: podemos começar com duas possíveis divisões iniciais $4 = 2 + 2$ ou $4 = 3 + 1$, anotando no quadro o valor 4 ou 3, respectivamente. Após isso, veja que os próximos números a serem anotados no quadro são os que podem ser gerados começando com 2 pedras ou 3 pedras. Nesse

caso, já sabemos o que ocorre. Assim, ao final teremos a soma $S_4 = 4 + 1 + 1 = 6$ (no primeiro caso) e $S_4 = 3 + 3 = 6$ (no segundo caso). Podemos ver que, de fato, a soma final S_n parece não depender das escolhas de divisões feitas;

- Suponha que esse padrão de independência das escolhas de divisões não afete a soma final. Ao começar com n pedras, façamos a divisão $n = (n-1) + 1$, anotando o produto $n-1$. Sucedendo nesse padrão de divisão, sempre separando apenas 1 pedra em cada etapa, teremos anotado os produtos $n-1, n-2, \dots, 2$ e 1, cuja soma é $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Pronto, agora vamos provar em definitivo que, de fato, isso independe das escolhas de divisões iniciais e intermediárias. Provaremos, por indução, que $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$ independe das escolhas de divisões.

Para $n = 2$, já temos o desejado. Agora, suponhamos que isso vale para todo k natural entre 2 e $n-1$, isto é, que $S_k = \frac{k(k-1)}{2}$ independe das escolhas de divisões, $k = 2, \dots, n-1$.

Agora, partindo de n pedras, podemos fazer a divisão inicial $n = k + (n-k)$ com $k, n-k \leq n-1$. Temos que o produto inicial anotado no quadro é $k(n-k)$. Mas, por hipótese de indução, vale que $S_k = \frac{k(k-1)}{2}$ e $S_{n-k} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ (aqui supondo que $S_1 = 0$). Assim, a soma dos produtos anotados no quadro é

$$\begin{aligned} & k(n-k) + \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \\ &= \frac{2k(n-k) + k^2 + (n-k)^2 - k - (n-k)}{2} \\ &= \frac{(k + (n-k))^2 - n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$, e o resultado vale para todo $n \geq 2$ ($n \geq 1$ se incluirmos $S_1 = 0$). Com isso, $S_{40} = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780$, como queríamos demonstrar.

Problema 10. A sequência de números inteiros x_n é definida por $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ e, para $n \geq 3$, x_n é o menor número composto maior que $2x_{n-1} - x_{n-2}$. Encontre o valor de x_{2026} .

Solução:

Vamos calcular os primeiros termos da sequência:

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_1 &= 8 \Rightarrow x_3 = 9 \\ 2x_3 - x_2 &= 12 \Rightarrow x_4 = 14 \\ 2x_4 - x_3 &= 19 \Rightarrow x_5 = 20 \\ 2x_5 - x_4 &= 26 \Rightarrow x_6 = 27. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} x_4 - x_3 &= 5 \\ x_5 - x_4 &= 6 \\ x_6 - x_5 &= 7. \end{aligned}$$

Isso nos permite conjecturar que

$$x_n - x_{n-1} = n + 1.$$

Realizando a soma telescópica da identidade anterior para $n \in \{4, 5, \dots, k\}$, obtemos

$$\begin{aligned} x_i &= x_3 + 5 + 6 + \dots + (i+1) \\ &= 9 + [1 + 2 + 3 + 4 + \dots + i + (i+1)] - (1 + 2 + 3 + 4) \\ &= \frac{(i+1)(i+2)}{2} - 1 \\ &= \frac{i^2 + 3i}{2} = \frac{i(i+3)}{2}. \end{aligned}$$

Provemos a afirmação anterior por indução. Suponha que ela vale para todos os inteiros $i \in \{3, 4, \dots, k\}$. Para provar que também vale para $k+1$, note que

$$2x_k - x_{k-1} = 2 \cdot \frac{k(k+3)}{2} - \frac{(k-1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+4)}{2} - 1.$$

Se $k \geq 3$, a depender da paridade de k , podemos escrever $\frac{(k+1)(k+4)}{2} = \frac{k+1}{2} \cdot (k+4)$ ou $\frac{k+4}{2} \cdot (k+1)$, garantindo assim que

$$x_{k+1} = \frac{(k+1)(k+4)}{2}.$$

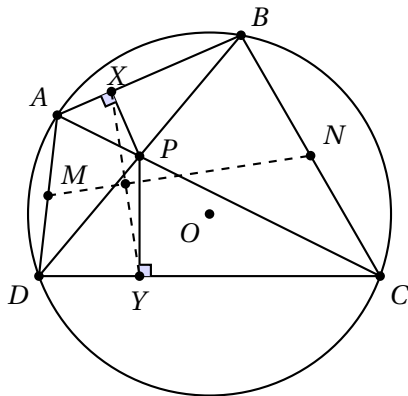
$$\text{Portanto, } x_{2026} = \frac{2026 \cdot 2029}{2}.$$

Problema 11. Em uma festa, existem 25 membros que satisfazem a seguinte condição: quando dois deles não se conhecem, então eles possuem algum amigo em comum. Sabemos que ninguém conhece todos na festa. Prove que a soma dos números de amigos de cada pessoa na festa é pelo menos 72.

Solução:

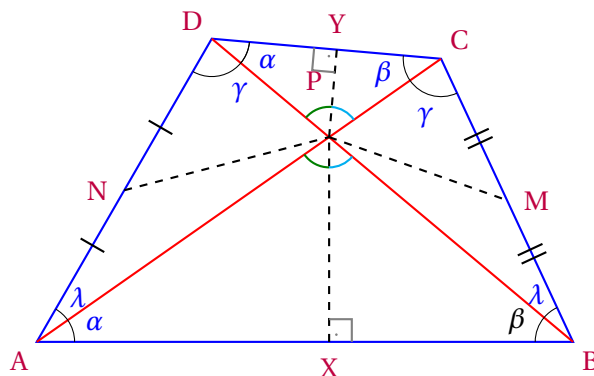
Primeiramente observe que se uma pessoa da festa conhecer apenas uma outra, então essa última será obrigada a conhecer todos os demais da festa. Portanto, todos na festa conhecem pelo menos duas pessoas. Suponha, por absurdo, que a soma dos números de amigos de cada um é menor que 72. Como ela deve ser um número par, ela é no máximo 70. Dado que $70/3 < 25$, pelo Princípio da Casa dos Pombos, há uma pessoa, digamos A , que conhece exatamente duas outras pessoas, digamos B e C . As outras 22 pessoas que não conhecem A obrigatoriamente devem conhecer B ou C . Assim, a soma dos números de amigos de A , B e C é pelo menos $2 + 1 + 1 + 22 = 26$. Cada uma das outras 22 pessoas conhece pelo menos duas outras, e assim a soma dos números de amigos de todos é pelo menos $22 \cdot 2 + 26 = 70$. Para que ocorra essa igualdade, B e C não devem se conhecer, e cada um dos demais membros deve conhecer exatamente um dos dois. Isso nos permite classificar os 22 membros que não estão em $\{A, B, C\}$ em dois grupos: o grupo G_B (dos que conhecem B) e o grupo G_C (dos que conhecem C). Pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos um desses grupos, digamos G_B , possui 11 membros. Se C conhecer qualquer um deles, a soma anterior irá ultrapassar 70. Para que isso não ocorra, C deve possuir um amigo em comum com cada um dos membros de G_B , que necessariamente devem ser distintos, porque cada um deles conhece apenas 2 pessoas. Consequentemente, G_C possui pelo menos 11 membros. Isso é um absurdo, porque uma pessoa de G_B que não conheça uma de G_C não poderá ter um amigo em comum com ela.

Problema 12. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível e $P = BD \cap AC$. Os pés das perpendiculares de P aos lados AB e CD são X e Y . Se M e N são os pontos médios dos lados BC e AD , prove que $MN \perp XY$.



Solução (Solução de Roberto Sant'anna e Yan Lima Machado)

Pelo enunciado, tem-se o seguinte esboço:



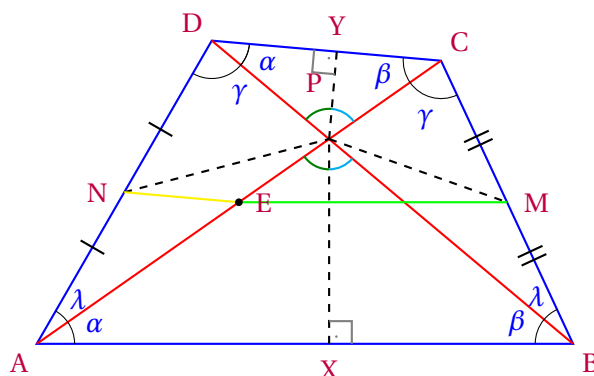
Como $ABCD$ é inscritível, tem-se que $\angle BDC = \angle CAB = \alpha$, $\angle DBA = \angle DCA = \beta$, $\angle ADB = \angle ACB = \gamma$ e $\angle DAC = \angle DBC = \lambda$. Ademais, tem-se que PX e PY são alturas dos triângulos ABP e CDP , respectivamente.

Portanto, tem-se que os triângulos CDP e ABP são semelhantes e, daí, tem-se que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{XP}{YP}.$$

Seja E o ponto médio de AC (esboço abaixo). Como M e N são pontos médios de AD e BC respectivamente, temos que EM e EN são bases médias de ABC e CDA , respectivamente, e, portanto

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EM}{EN} = \frac{XP}{YP} \quad (1).$$

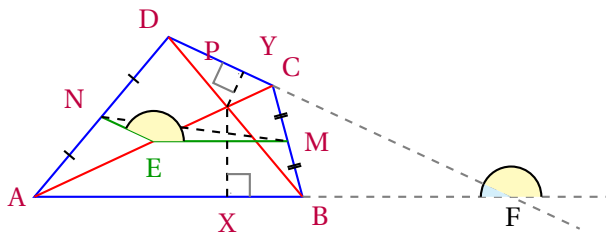


Ademais, $EM \parallel AB$ e $EN \parallel CD$.

Pela conclusão anterior, sem perda de generalidade, pode-se inferir que PX é perpendicular à reta suporte de EM , chamemo-la de r . Analogamente, PY é perpendicular à reta suporte de EN , chamemo-la de s .

Analisando os ângulos $\angle NEM$ e $\angle YPX$, tem-se que ambos são congruentes.

Prova: Como $EM \parallel AB$ e $EN \parallel CD$, ao prolongar os lados AB e CD , eles se encontram num ponto F , o ângulo obtuso formado entre os prolongamentos é congruente ao ângulo $\angle NEM$.



Analisando o quadrilátero $FYPX$ formado, tem-se, na soma dos ângulos internos, que:

$$\angle XFY + 90^\circ + 90^\circ + \angle YPX = 360^\circ$$

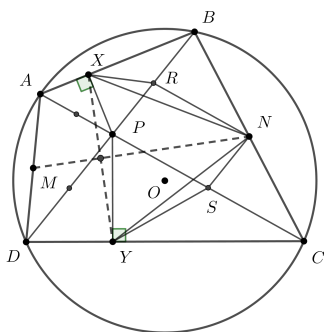
$$\Leftrightarrow \angle YPX = 180^\circ - \angle XFY$$

$$\Leftrightarrow \angle YPX = \angle NEM \quad (2)$$

Logo, pelas equações (1) e (2), tem-se que NEM e XYP são triângulos semelhantes devido ao caso LAL de semelhança.

Como visto anteriormente, $PX \perp r \supset EM$ e $PY \perp s \supset EN$; então, obrigatoriamente, $MN \perp XY$. Isso é comprovado pelo fato de que a relação de semelhança consiste em realizar, no máximo, rotações e translações. Assim, ao realizar algum desses movimentos de tal forma que dois pares de lados homólogos sejam perpendiculares entre si, então o terceiro par também será perpendicular.

Segunda solução:



Sejam R e S os pontos médios de BP e CP , respectivamente. Os triângulos XRN e NSY são congruentes pelo caso LAL . Daí $XN = NY$. De forma análoga, $MX = MY$. Portanto, MN é a mediatriz de XY .

Problema 13. Uma máquina tem dois botões: um deles dobra um número inteiro e o outro o aumenta em 1 unidade. Por exemplo, apertando os botões dessa máquina é possível realizar as seguintes operações:

$$1 \rightarrow_{+1} 2 \rightarrow_{\times 2} 4 \rightarrow_{+1} 5.$$

Se no início você começa com o número 0, qual é o número mínimo de vezes que você precisa apertar botões dessa máquina para obter:

- 100?
- 2024?

Solução:

Podemos considerar o problema reverso de transformar o número inteiro n em 0 por meio de duas operações: dividir por 2 ou subtrair 1. Seja $r(n)$ o número mínimo de movimentos para transformar n em 0 com essas duas operações. Claramente, $r(2n+1) = r(2n) + 1$, pois não podemos dividir por 2. Vamos provar por indução que $r(2k) = 1 + r(k)$. Para $k = 1$ é imediato. Suponha que já provamos para todos os números pares menores que $2k$. Se aplicarmos a operação de subtrair 1 de $2k$, o número mínimo de operações para obter 0 não será menor que $1 + r(2k-1) = 2 + r(2k-2) = 3 + r(k-1)$. Por outro lado, se aplicarmos a operação de dividir por 2 primeiro, o número de operações será $1 + r(k) \leq 2 + r(k-1)$. Ou seja, começar dividindo por 2 é mais vantajoso. Em geral, se $n = 2^{k_1} + 2^{k_1+k_2} + \dots + 2^{k_1+k_2+\dots+k_m}$, segue que

$$\begin{aligned} r(n) &= k_1 + r(n/2^{k_1}) \\ &\dots \\ &= (k_1 + k_2 + \dots + k_m) + m. \end{aligned}$$

- Como $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$, segue que $r(100) = 6 + 3 = 9$.
- Como $2024 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3$, segue que $r(2024) = 17$.

Novos Problemas

Problemas Universitários

Problema 14. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine a soma dos elementos da matriz A^{2026}

Problema 15. Calcule

$$\int_{-1}^1 \frac{x+1+\sqrt{1+x^2}}{2(1+x^2)(1+\sqrt{1+x^2})} dx$$

Problema 16. Seja p um primo e $0 \leq k \leq p-1$ um inteiro. Mostre que

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$$

Problema 17. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\det A = -1$. Mostre que $\det(A^2 + I_2) \geq 4$. Quando a igualdade é válida?

Problema 18. Para cada função contínua $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, seja $I(f) = \int_0^1 x^2 f(x) dx$ e $J(f) = \int_0^1 x f^2(x) dx$. Encontre o valor máximo de $I(f) - J(f)$ sobre todas essas funções.

Problemas de Matemática Elementar

Problema 19. Qual é o primeiro algarismo após a vírgula da representação decimal de $\sqrt{9 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100}$?

Problema 20. A função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $f(1) = 2027$ e, para $n > 1$,

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 \cdot f(n).$$

Qual é o valor de $f(2027)$?

Problema 21. Elaís observa “palavras” compostas por n caracteres, cada um igual a ‘E’ ou ‘L’. Em cada jogada, Elaís pode substituir ‘EL’ em qualquer lugar da palavra por ‘LE’. Por exemplo, em duas jogadas, ela transforma a palavra ‘LEELEELLE’ na palavra ‘LEELEELLE’.

$$LEELEELLE \rightarrow LEELEELLE \rightarrow LEELEELLE$$

Se não houver ‘L’ imediatamente à direita de um ‘E’, Elaís não pode fazer uma jogada.

- Qual é o número máximo de jogadas que Elaís pode fazer na palavra LEELEELLE?
- Dentre todas as palavras de 20 letras, qual é o valor máximo possível de jogadas que ela pode fazer?

Problema 22. Estão escritas no quadro n unidades consecutivas. Entre algumas delas, colocam-se sinais “+” e calcula-se a soma obtida. Por exemplo, se estiverem escritas 10 unidades, pode-se obter a soma 136:

$$1 + 1 + 111 + 11 + 11 + 1 = 136.$$

a) Se $n = 53$, é possível obter a soma 116?

b) Se $n = 53$, é possível obter a soma 117?

c) Qual é a maior soma de quatro algarismos que se pode obter se $n = 53$?

Problema 23. Prove que

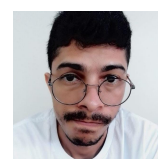
$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2}$$

para todo $n \geq 2$.

Problema 24. Suponha que x e y são maiores que 0. Vamos denotar o mínimo de x , $\frac{1}{y}$ e $y + \frac{1}{x}$ por S , isto é, $S = \min\{x, \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x}\}$. Qual é o valor máximo possível para S ?



Samuel Feitosa é professor na Universidade Federal da Bahia desde 2012. Foi medalhista de Bronze na Olimpíada Internacional de Matemática em 2003 e é membro da Comissão Nacional de Olimpíadas de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Contribui ativamente na organização de olimpíadas e treinamentos de alunos para diversas competições matemáticas nacionais e internacionais.



Yure Carneiro de Oliveira graduou-se e fez mestrado em matemática na UFBA, onde também realiza seu doutorado em matemática na área de Probabilidade. Após quase concluir um mestrado em estatística, ingressar em uma outra graduação e começar a estudar violino, agora está focado na conclusão do doutorado.



Link para o *site* da
Revista de Matemática Hipátia

