

PROBLEMA

O Jogo do EL e Outros Problemas

Por Yure Carneiro e Samuel Feitosa

Soluções da Edição Anterior

Problemas Universitários

Problema 1. Mostre que para qualquer primo $p > 17$, o número

$$p^{32} - 1$$

é divisível por 16320.

Solução (Solução de Vinícius Leite).

1º Método: Pequeno Teorema de Fermat e Fatoração

A fatoração em primos de 16320 é $2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$. Como os fatores são potências de primos distintos, eles são coprimos entre si. Logo, basta demonstrar que $p^{32} - 1$ é divisível por cada um deles individualmente.

Divisibilidade por 3, 5 e 17:

Pelo Pequeno Teorema de Fermat, se q é um número primo e $\text{mdc}(a, q) = 1$, então $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Como $p > 17$ é primo, ele é coprimo com 3, 5 e 17.

Aplicando o teorema:

- Para $q = 3$: $p^2 \equiv 1 \pmod{3} \implies (p^2)^{16} \equiv 1^{16} \pmod{3} \implies p^{32} \equiv 1 \pmod{3}$.
- Para $q = 5$: $p^4 \equiv 1 \pmod{5} \implies (p^4)^8 \equiv 1^8 \pmod{5} \implies p^{32} \equiv 1 \pmod{5}$.
- Para $q = 17$: $p^{16} \equiv 1 \pmod{17} \implies (p^{16})^2 \equiv 1^2 \pmod{17} \implies p^{32} \equiv 1 \pmod{17}$.

Isso garante que 3, 5 e 17 dividem $p^{32} - 1$.

Divisibilidade por 2^6 :

Fatorando a expressão recursivamente por diferença de quadrados, obtemos

$$p^{32} - 1 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)(p^4 + 1)(p^8 + 1)(p^{16} + 1).$$

Como p é um primo maior que 17, p é ímpar. Os termos $(p - 1)$ e $(p + 1)$ são inteiros pares consecutivos. Um deles é necessariamente múltiplo de 2 e o outro é múltiplo de 4. O produto $(p - 1)(p + 1)$, portanto, é múltiplo de 8 (ou seja, divisível por 2^3).

Os quatro termos restantes da forma $(p^k + 1)$ representam a soma de uma potência de base ímpar com 1, resultando sempre em números pares. Cada um desses quatro parênteses contribui com, pelo menos, um fator 2, totalizando um fator de 2^4 .

Multiplicando todas as contribuições, garantimos que $p^{32} - 1$ é múltiplo de $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$. Sendo divisível por 2^7 , é trivialmente divisível por 2^6 .

Conclui-se que $16320 \mid (p^{32} - 1)$.

2º Método: Função de Carmichael

O problema equivale a provar a congruência $p^{32} \equiv 1 \pmod{16320}$. Para isso, utilizaremos a Função de Carmichael, denotada por $\lambda(n)$, que estabelece o menor expoente estritamente positivo tal que $a^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ para todo a coprimo com n . Sabendo que $16320 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$, o valor de $\lambda(16320)$ é dado pelo mínimo múltiplo comum das funções de seus fatores primos:

$$\lambda(16320) = \text{mmc}(\lambda(2^6), \lambda(3), \lambda(5), \lambda(17)).$$

Pelas propriedades da função:

- Para potências de base 2 com expoente $k \geq 3$: $\lambda(2^k) = 2^{k-2}$. Logo, $\lambda(2^6) = 2^4 = 16$.

- Para primos ímpares q : $\lambda(q) = q - 1$. Logo, $\lambda(3) = 2$, $\lambda(5) = 4$ e $\lambda(17) = 16$.

Substituindo esses valores, encontramos o expoente universal do grupo multiplicativo:

$$\lambda(16320) = \text{mmc}(16, 2, 4, 16) = 16.$$

Isto significa que, para todo inteiro coprimo com 16320, a elevação à 16^{a} potência resulta em congruência a 1. Como $p > 17$ é primo, temos que $\text{mdc}(p, 16320) = 1$. Portanto:

$$p^{16} \equiv 1 \pmod{16320}.$$

Elevando ambos os membros da congruência ao quadrado, obtemos diretamente o resultado exigido pela questão:

$$(p^{16})^2 \equiv 1^2 \pmod{16320} \implies p^{32} \equiv 1 \pmod{16320}.$$

Problema 2. Sejam c e x_0 números reais positivos fixados. Defina a sequência

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}} \right), \text{ para } n \geq 1.$$

Prove que a sequência converge e que o limite é $\sqrt{c}$.

Solução (Solução de Yan Lima Machado). A princípio, pela desigualdade das médias, tem-se que:

$$\frac{x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}}}{2} \geq \sqrt{x_{n-1} \cdot \frac{c}{x_{n-1}}}.$$

$$\Leftrightarrow x_n \geq \sqrt{c}.$$

Portanto, tem-se que a sequência é limitada inferiormente por $\sqrt{c}$.

Desenvolvendo a expressão dada pelo enunciado, tem-se que:

$$x_n = \frac{x_{n-1}^2 + c}{2x_{n-1}}.$$

Fazendo $x_n - x_{n-1}$:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1}^2 + c}{2x_{n-1}} - \frac{2x_{n-1}^2}{2x_{n-1}}.$$

$$x_n - x_{n-1} = \frac{c - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}}.$$

$$x_n - x_{n-1} = - \left[\frac{(x_{n-1} + \sqrt{c})(x_{n-1} - \sqrt{c})}{2x_{n-1}} \right].$$

Como $x_{n-1} > 0$, $x_{n-1} + \sqrt{c} > 0$.

Ademais, como visto no início da solução, $x_{n-1} \geq \sqrt{c}$, daí $x_{n-1} - \sqrt{c} \geq 0$.

Logo, $x_n - x_{n-1} \leq 0 \Rightarrow x_n \leq x_{n-1}$.

Como a sequência é limitada inferiormente por $\sqrt{c}$ e decrescente a partir do primeiro termo $n \geq 1$, ela converge.

Como ela converge, $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} x_{n-1} = L > 0$.

Daí, tem-se que

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{c}{L} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2L = L + \frac{c}{L}$$

$$\Leftrightarrow 2L^2 = L^2 + c$$

$$\Leftrightarrow L^2 = c$$

$$\Leftrightarrow L = \sqrt{c}.$$

Portanto, está mostrado que o limite da sequência é $\sqrt{c}$.

Curiosidade: A questão apresenta o método de Herão, também conhecido como método babilônico, um algoritmo utilizado para calcular aproximações de raízes quadradas. Ele homenageia o matemático grego Herão de Alexandria, que descreveu o procedimento em seus escritos. O método começa com uma estimativa inicial para a raiz desejada e, em seguida, utiliza uma fórmula iterativa para obter aproximações cada vez melhores. Por essa razão, ele é considerado um dos métodos numéricos mais antigos e importantes da história da matemática.

Problema 3. Calcule o determinante da matriz quadrada de ordem n , $A = (a_{ij})_{ij}$, definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{se } i \neq j \\ 2, & \text{se } i = j \end{cases}.$$

Solução (Solução de Victor Leite).

Análise dos Casos Iniciais e Formulação da Hipótese

Para começar, testaremos os casos para $n = 1, 2, 3$ a fim de identificar um padrão útil para ser explorado.

Para $n = 1$:

$$A_1 = [2] \Rightarrow \det(A_1) = 2$$

Para $n = 2$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = (2)(2) - (-1)(-1) = 3$$

Para $n = 3$:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante pela Regra de Sarrus:

$$\begin{aligned} \det(A_3) &= [(2)(2)(2) + (-1)(-1)(1) + (1)(-1)(-1)] \\ &\quad - [(1)(2)(1) + (-1)(-1)(2) + (2)(-1)(-1)] \\ &= [8 + 1 + 1] - [2 + 2 + 2] \\ &= 10 - 6 = 4 \end{aligned}$$

A sequência de determinantes (2, 3, 4) para matrizes de ordem (1, 2, 3) sugere uma progressão aritmética. Formulamos a seguinte hipótese para o caso geral de ordem n :

$$\det(A_n) = n + 1$$

Demonstração via Teorema de Jacobi

Para provar que $\det(A_n) = n + 1$ para qualquer $n \geq 1$, aplicaremos o Teorema de Jacobi:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n ($n \geq 2$). Se a uma fila (linha ou coluna) de A for adicionado um múltiplo escalar de outra fila paralela a ela, obtemos uma matriz B tal que

$$\det(A) = \det(B).$$

Em outras palavras: somar a uma linha (ou coluna) qualquer múltiplo de outra linha (ou coluna) não altera o valor do determinante. Isso nos ajudará a simplificar o cálculo do determinante da matriz genérica A_n .

A representação expandida da matriz original A_n é

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ -1 & 2 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 1 & -1 & 2 & -1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ -1 & 1 & -1 & 2 & \dots & (-1)^{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & (-1)^{n-3} & (-1)^{n-4} & \dots & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Operações nas Linhas:

Note que a presença de vários termos 1 e -1 alternados nos permite zerar grande parte da matriz simplesmente somando ou subtraindo as linhas entre si,

logo, para toda linha L_k exceto a primeira, aplicaremos a transformação $L_k \leftarrow L_k + (-1)^k L_1$. Note que $(-1)^k$ nos permite alternar entre soma e subtração com base na paridade da linha, resolvendo a alternância entre 1 e -1 e transformando a maior parte em 0, de brinde transformando (quase) todos os elementos da diagonal principal em 1.

Para o elemento da diagonal ($j = k$):

$$a'_{kk} = 2 + (-1)^k (-1)^{k-1} = 2 - (-1)^{2k} = 2 - 1 = 1.$$

Para a primeira coluna ($j = 1$):

$$a'_{k1} = (-1)^{k-1} + (-1)^k (2) = -(-1)^k + 2(-1)^k = (-1)^k.$$

Após essas operações, a matriz assume a forma A'_n :

$$A'_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

2. Operações nas Colunas:

Seria muito agradável zerar todos os elementos da coluna 1 (exceto o primeiro), pois isso tornaria a matriz triangular superior. Note que, novamente, realizando somas e subtrações entre a primeira coluna e as demais colunas, podemos usar os elementos 1 da diagonal principal para zerar os elementos da primeira coluna. Para isso, aplicamos a transformação $C_1 \leftarrow C_1 - \sum_{k=2}^n (-1)^k C_k$. Note que, novamente, o $(-1)^k$ permite que alternemos entre soma e subtração, resolvendo a alternância entre 1 e -1 e zerando todos os elementos da primeira coluna, exceto o primeiro. Como as colunas C_k ($k \geq 2$) possuem apenas o elemento 1 na linha k e 0 nas demais posições abaixo da primeira linha, essa operação zera completamente todos os a'_{k1} para $k \geq 2$. O elemento a_{11} sofre a seguinte alteração:

$$\begin{aligned} a''_{11} &= 2 - \sum_{k=2}^n (-1)^k a_{1k} \\ &= 2 - \sum_{k=2}^n (-1)^k (-1)^{k-1} \\ &= 2 - \sum_{k=2}^n (-1)^{2k-1}. \end{aligned}$$

Como $2k - 1$ é sempre um número ímpar, $(-1)^{2k-1} = -1$. Logo

$$a''_{11} = 2 - \sum_{k=2}^n (-1) = 2 + \sum_{k=2}^n 1 = 2 + (n - 1) = n + 1.$$

A matriz final A''_n torna-se estritamente triangular superior:

$$A''_n = \begin{bmatrix} n+1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Como o determinante de uma matriz triangular é dado pelo produto dos elementos de sua diagonal principal,

$$\det(A_n) = (n+1) \cdot \prod_{k=2}^n 1 = n+1.$$

Isso conclui a demonstração formal da hipótese.

Solução (Solução de Vinícius Mello).

A matriz A é uma matriz pode ser escrita como

$$A = I + u_n u_n^T,$$

onde I é a matriz identidade de ordem n e $u_n^T = [1 \ -1 \ 1 \ -1 \ \dots \ (-1)^{n-1}]$, ou seja, u_n é uma matriz coluna cujas entradas alternam entre 1 e -1. Por exemplo, para $n = 4$ temos

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ -1 \ 1 \ -1). \end{aligned}$$

Portanto, pela conhecida identidade

$$\det(I + uv^T) = 1 + v^T u,$$

aplicando-a com $u = u_n$ e $v = u_n$, temos

$$\det(A) = \det(I + u_n u_n^T) = 1 + u_n^T u_n = 1 + n.$$

Se a identidade $\det(I + uv^T) = 1 + v^T u$ não for tão conhecida assim, podemos demonstrá-la rapidamente com a seguinte ideia: se $u = 0$, não há nada a demonstrar. Caso contrário, é fácil ver que u é um autovetor de $I + uv^T$ com autovalor $1 + v^T u$, pois

$$(I + uv^T)u = u + u(v^T u) = (1 + v^T u)u.$$

Além disso, se x é um vetor tal que $v^T x = 0$, então $(I + uv^T)x = x$, ou seja, x é um autovetor de $I + uv^T$

com autovalor 1. Como o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ tem dimensão n , podemos escolher $n-1$ vetores linearmente independentes $x_1, \dots, x_{n-1}$ tais que $v^T x_i = 0$ para todo i . Assim, os autovalores de $I + uv^T$ são $1 + v^T u$ e 1 (com multiplicidade $n-1$). Portanto, como o determinante de uma matriz é o produto de seus autovalores, temos

$$\det(I + uv^T) = (1 + v^T u) \cdot 1^{n-1} = 1 + v^T u.$$

Problema 4. Considere uma esfera de raio unitário centrada na origem de um sistema de coordenadas xyz . Seja C um pentágono regular inscrito na esfera e contido no plano xy . Determine a área da região contida na esfera cuja projeção com respeito à terceira coordenada coincide com a região delimitada por C .

Solução: Considere a projeção no plano xy dada pela região poligonal limitada pelo pentágono na figura abaixo.

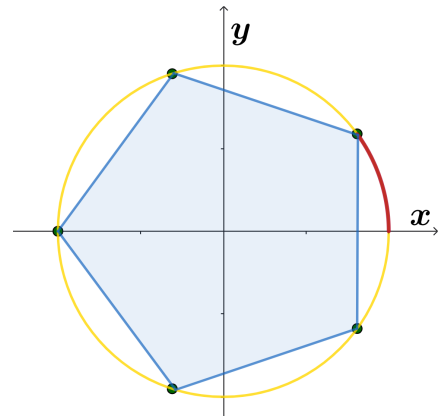


Figura 1: Projeção no plano xy .

Os pontos da esfera que são projetados nessa região (aqui contando as partes superior e inferior da esfera que se projetam na região poligonal) formam uma região cuja área pode ser calculada através de

$$A = 4\pi - 5 \cdot A_{\text{revolução}}$$

onde: 4π é a área da superfície esférica de raio 1 ($4\pi R^2$), e $A_{\text{revolução}}$ é a área da superfície de revolução obtida pela rotação da curva que pode ser parametrizada por

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = \cos(t), \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{5}$$

(cujo traço é o arco em destaque na figura), em torno

do eixo x . Temos que

$$\begin{aligned} A_{\text{revolução}} &= 2\pi \int_0^{\pi/5} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/5} \sin(t) \sqrt{[-\sin(t)]^2 + [\cos(t)]^2} dt \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/5} \sin(t) dt \\ &= 2\pi \left[-\cos(t) \right]_0^{\pi/5} \\ &= 2\pi(1 - \cos(\pi/5)) = \frac{(3 - \sqrt{5})\pi}{2} \end{aligned}$$

[O fato de que $\cos(\pi/5) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ pode ser obtido usando relações trigonométricas em um triângulo isósceles de ângulos $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ e base 1]. Portanto,

$$A = \frac{8\pi - 5(3 - \sqrt{5})\pi}{2} = \frac{(5\sqrt{5} - 7)\pi}{2}.$$

Problema 5. Seja f diferenciável em $x = a$ com $f(a) \neq 0$. Calcule:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(a + 1/n)}{f(a)} \right]^n.$$

Solução: Basta calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+x)}{f(a)} \right]^{1/x}.$$

Como f é contínua, para x suficientemente pequeno, $f(a+x)$ e $f(a)$ têm o mesmo sinal, e daí segue que

$$\begin{aligned} \log \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+x)}{f(a)} \right)^{1/x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\log \left(\frac{|f(a+x)|}{|f(a)|} \right)^{1/x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log |f(a+x)| - \log |f(a)|}{x}. \end{aligned}$$

A última expressão à direita é a definição da derivada de $\log |f(x)|$ em $x = a$, que sabemos ser igual a $f'(a)/f(a)$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+x)}{f(a)} \right]^{1/x} = e^{f'(a)/f(a)}.$$

Problema 6. Sejam $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ e $P \in \mathbb{C}[X]$ um polinômio não constante tal que $P(0) \neq 0$ e $AB = P(A)$. Prove que a matriz A é invertível e que as matrizes A e B comutam (isto é, que $AB = BA$).

Solução: Podemos escrever $P(X)$ da seguinte forma:

$$P(X) = P(0) + XQ(X),$$

onde $Q \in \mathbb{C}[X]$. Assim segue que

$$P(A) = P(0) \cdot I_n + AQ(A).$$

Agora, como

$$P(A) = AB,$$

temos que

$$AB = P(0) \cdot I_n + AQ(A)$$

e daí $A[B - Q(A)] = P(0)I_n$. Mas,

$$P(0) \neq 0$$

implica que

$$A \cdot \frac{1}{P(0)} [B - Q(A)] = I_n \implies A^{-1} = \frac{1}{P(0)} [B - Q(A)].$$

Logo A é invertível e a expressão acima é a inversa de A . Por outro lado,

$$AB = P(A) \iff B = A^{-1}P(A).$$

Então temos que

$$BA = A^{-1}P(A)A = A^{-1}AP(A) = I_n P(A) = P(A) = AB.$$

Portanto as matrizes A e B comutam.

Problemas de Matemática Elementar

Problema 7. O produto dos números reais positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ é igual a 1. Prove, **sem ser por indução**, que

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

Solução (Solução de Vinícius Leite).

Desigualdade das Médias (MA-MG)

A demonstração utiliza a Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica (MA-MG). Para quaisquer números reais positivos x e y , temos que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \implies x+y \geq 2\sqrt{xy}.$$

Aplicando essa desigualdade individualmente para cada par formado por 1 e a_i (sabendo que $a_i > 0$), construímos o seguinte sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} 1 + a_1 &\geq 2\sqrt{a_1} \\ 1 + a_2 &\geq 2\sqrt{a_2} \\ &\vdots \\ 1 + a_n &\geq 2\sqrt{a_n}. \end{aligned}$$

Como todos os termos em ambos os lados das desigualdades são estritamente positivos, podemos multiplicar as n desigualdades membro a membro sem alterar o sentido da relação:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq (2\sqrt{a_1})(2\sqrt{a_2}) \cdots (2\sqrt{a_n}).$$

Agrupando os n fatores 2 e unificando as raízes no lado direito, obtemos

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}.$$

Por hipótese, o produto de todos os termos a_i é exatamente 1 ($a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$). Substituindo esse valor, a expressão sob a raiz resulta em 1 (elemento neutro da multiplicação):

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n \sqrt{1}.$$

O que demonstra diretamente a tese:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

Problema 8. *Seja A um subconjunto dos números naturais tal que, entre 100 números naturais consecutivos, existe um elemento de A . Prove que podemos encontrar quatro números diferentes a, b, c e d em A tais que $a + b = c + d$.*

Solução (Solução de Victor Leite).

1º Passo: A infinitude do conjunto A

Dado que entre 100 naturais consecutivos existe, ao menos, um elemento de A , podemos concluir que o número de elementos de A equivale, no mínimo, à quantidade de partições de 100 elementos do conjunto dos naturais, que por sua vez é infinito. Logo, podemos afirmar que o conjunto A possui infinitos termos, e podemos escrever $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, com $a_i < a_{i+1}$.

2º Passo: O Princípio da Casa dos Pombos

Provar que $\exists a, b, c, d \in A \mid a + b = c + d$ equivale a provar que para $a, b, c, d \in A$, $a - c = d - b$, o que, por sua vez, equivale a provar que a distância entre a e c equivale à distância entre d e b .

Sabendo que a cada 100 naturais consecutivos existe sempre ao menos um elemento de A , podemos afirmar que em qualquer intervalo fechado do tipo $[a_n, a_n + 100]$ existirão ao menos 2 elementos de A . Logo, a distância máxima possível entre dois elementos consecutivos a_n e a_{n+1} pertencentes ao conjunto A é rigorosamente 100.

Como as distâncias entre elementos consecutivos resultam em números inteiros, todas as distâncias possíveis pertencem ao intervalo $[1, 100]$. Portanto, o número máximo de distâncias distintas entre elementos consecutivos de A é 100.

Para aplicar o Princípio da Casa dos Pombos, analisamos os 202 primeiros elementos de A . Com eles, podemos formar exatamente 101 pares disjuntos de elementos consecutivos:

$$(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{201}, a_{202}).$$

Temos 101 pares gerando 101 medidas de distância. Como existem no máximo 100 valores distintos possíveis para essas distâncias, o Princípio da Casa dos Pombos (Teorema de Dirichlet) garante que, inevitavelmente, ao menos 2 pares disjuntos possuirão exatamente a mesma distância.

Sejam esses pares disjuntos (c, a) e (b, d) , ambos pertencentes a A , tais que a distância do primeiro par seja igual à distância do segundo par:

$$a - c = d - b.$$

Manipulando algebricamente a igualdade, obtemos diretamente:

$$a + b = c + d.$$

Como os dois pares analisados são disjuntos e os elementos de A podem ser dispostos em uma sequência estritamente crescente de naturais, os quatro números a, b, c e d são obrigatoriamente distintos, o que conclui a prova.

Problema 9. *Uma pilha tem 40 pedras. A pilha é dividida em duas partes, depois uma das partes é dividida em duas novamente, etc., até termos 40 pedras separadas (40 pilhas formadas com uma pedra cada). Depois de cada divisão de uma das pilhas em duas menores, escrevemos o produto dos números de pedras nestas duas pilhas em um quadro. Mostre que, no final, a soma de todos os números no quadro será igual a 780.*

Solução: Para mostrar o resultado desejado, vamos analisar o problema de um ponto de vista mais geral, para tentar achar algum padrão que possa ser generalizado e então resolver o caso particular de 40 pedras. Seja n o número de pedras no início da divisão e chamemos de S_n a soma final obtida ao final do processo.

- Para $n = 2$: a única opção de divisão é $2 = 1 + 1$, cujo produto é $S_2 = 1$;
- Para $n = 3$: por simetria, podemos considerar a divisão inicial $3 = 2 + 1$, anotando no quadro o valor 2. Após isso, veja que os próximos números a serem anotados no quadro são os que podem ser gerados começando com 2 pedras. Nesse caso, já sabemos o que ocorre. Assim, ao final teremos a soma $S_3 = 2 + 1 = 3$;
- Para $n = 4$: podemos começar com duas possíveis divisões iniciais $4 = 2 + 2$ ou $4 = 3 + 1$, anotando no quadro o valor 4 ou 3, respectivamente. Após isso, veja que os próximos números a serem anotados no quadro são os que podem ser gerados começando com 2 pedras ou 3 pedras. Nesse

caso, já sabemos o que ocorre. Assim, ao final teremos a soma $S_4 = 4 + 1 + 1 = 6$ (no primeiro caso) e $S_4 = 3 + 3 = 6$ (no segundo caso). Podemos ver que, de fato, a soma final S_n parece não depender das escolhas de divisões feitas;

- Suponha que esse padrão de independência das escolhas de divisões não afete a soma final. Ao começar com n pedras, façamos a divisão $n = (n-1) + 1$, anotando o produto $n-1$. Sucedendo nesse padrão de divisão, sempre separando apenas 1 pedra em cada etapa, teremos anotado os produtos $n-1, n-2, \dots, 2$ e 1, cuja soma é $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Pronto, agora vamos provar em definitivo que, de fato, isso independe das escolhas de divisões iniciais e intermediárias. Provaremos, por indução, que $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$ independe das escolhas de divisões.

Para $n = 2$, já temos o desejado. Agora, suponhamos que isso vale para todo k natural entre 2 e $n-1$, isto é, que $S_k = \frac{k(k-1)}{2}$ independe das escolhas de divisões, $k = 2, \dots, n-1$.

Agora, partindo de n pedras, podemos fazer a divisão inicial $n = k + (n-k)$ com $k, n-k \leq n-1$. Temos que o produto inicial anotado no quadro é $k(n-k)$. Mas, por hipótese de indução, vale que $S_k = \frac{k(k-1)}{2}$ e $S_{n-k} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ (aqui supondo que $S_1 = 0$). Assim, a soma dos produtos anotados no quadro é

$$\begin{aligned} & k(n-k) + \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \\ &= \frac{2k(n-k) + k^2 + (n-k)^2 - k - (n-k)}{2} \\ &= \frac{(k + (n-k))^2 - n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$, e o resultado vale para todo $n \geq 2$ ($n \geq 1$ se incluirmos $S_1 = 0$). Com isso, $S_{40} = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780$, como queríamos demonstrar.

Problema 10. A sequência de números inteiros x_n é definida por $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ e, para $n \geq 3$, x_n é o menor número composto maior que $2x_{n-1} - x_{n-2}$. Encontre o valor de x_{2026} .

Solução:

Vamos calcular os primeiros termos da sequência:

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_1 &= 8 \Rightarrow x_3 = 9 \\ 2x_3 - x_2 &= 12 \Rightarrow x_4 = 14 \\ 2x_4 - x_3 &= 19 \Rightarrow x_5 = 20 \\ 2x_5 - x_4 &= 26 \Rightarrow x_6 = 27. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} x_4 - x_3 &= 5 \\ x_5 - x_4 &= 6 \\ x_6 - x_5 &= 7. \end{aligned}$$

Isso nos permite conjecturar que

$$x_n - x_{n-1} = n + 1.$$

Realizando a soma telescópica da identidade anterior para $n \in \{4, 5, \dots, k\}$, obtemos

$$\begin{aligned} x_i &= x_3 + 5 + 6 + \dots + (i+1) \\ &= 9 + [1 + 2 + 3 + 4 + \dots + i + (i+1)] - (1 + 2 + 3 + 4) \\ &= \frac{(i+1)(i+2)}{2} - 1 \\ &= \frac{i^2 + 3i}{2} = \frac{i(i+3)}{2}. \end{aligned}$$

Provemos a afirmação anterior por indução. Suponha que ela vale para todos os inteiros $i \in \{3, 4, \dots, k\}$. Para provar que também vale para $k+1$, note que

$$2x_k - x_{k-1} = 2 \cdot \frac{k(k+3)}{2} - \frac{(k-1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+4)}{2} - 1.$$

Se $k \geq 3$, a depender da paridade de k , podemos escrever $\frac{(k+1)(k+4)}{2} = \frac{k+1}{2} \cdot (k+4)$ ou $\frac{k+4}{2} \cdot (k+1)$, garantindo assim que

$$x_{k+1} = \frac{(k+1)(k+4)}{2}.$$

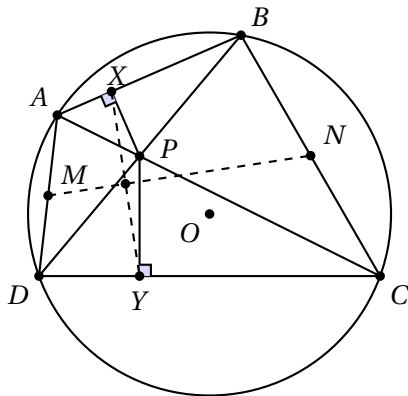
$$\text{Portanto, } x_{2026} = \frac{2026 \cdot 2029}{2}.$$

Problema 11. Em uma festa, existem 25 membros que satisfazem a seguinte condição: quando dois deles não se conhecem, então eles possuem algum amigo em comum. Sabemos que ninguém conhece todos na festa. Prove que a soma dos números de amigos de cada pessoa na festa é pelo menos 72.

Solução:

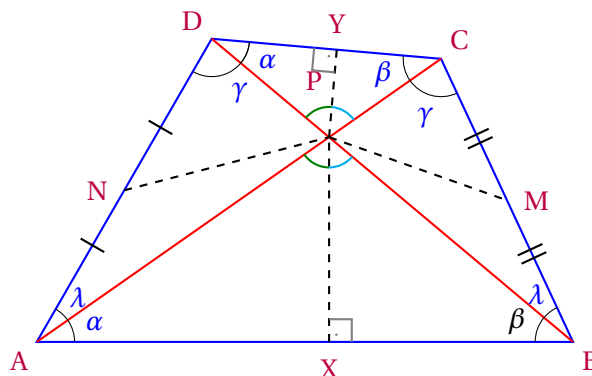
Primeiramente observe que se uma pessoa da festa conhecer apenas uma outra, então essa última será obrigada a conhecer todos os demais da festa. Portanto, todos na festa conhecem pelo menos duas pessoas. Suponha, por absurdo, que a soma dos números de amigos de cada um é menor que 72. Como ela deve ser um número par, ela é no máximo 70. Dado que $70/3 < 25$, pelo Princípio da Casa dos Pombos, há uma pessoa, digamos A , que conhece exatamente duas outras pessoas, digamos B e C . As outras 22 pessoas que não conhecem A obrigatoriamente devem conhecer B ou C . Assim, a soma dos números de amigos de A , B e C é pelo menos $2 + 1 + 1 + 22 = 26$. Cada uma das outras 22 pessoas conhece pelo menos duas outras, e assim a soma dos números de amigos de todos é pelo menos $22 \cdot 2 + 26 = 70$. Para que ocorra essa igualdade, B e C não devem se conhecer, e cada um dos demais membros deve conhecer exatamente um dos dois. Isso nos permite classificar os 22 membros que não estão em $\{A, B, C\}$ em dois grupos: o grupo G_B (dos que conhecem B) e o grupo G_C (dos que conhecem C). Pelo Princípio da Casa dos Pombos, pelo menos um desses grupos, digamos G_B , possui 11 membros. Se C conhecer qualquer um deles, a soma anterior irá ultrapassar 70. Para que isso não ocorra, C deve possuir um amigo em comum com cada um dos membros de G_B , que necessariamente devem ser distintos, porque cada um deles conhece apenas 2 pessoas. Consequentemente, G_C possui pelo menos 11 membros. Isso é um absurdo, porque uma pessoa de G_B que não conheça uma de G_C não poderá ter um amigo em comum com ela.

Problema 12. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível e $P = BD \cap AC$. Os pés das perpendiculares de P aos lados AB e CD são X e Y . Se M e N são os pontos médios dos lados BC e AD , prove que $MN \perp XY$.



Solução (Solução de Roberto Sant'anna e Yan Lima Machado)

Pelo enunciado, tem-se o seguinte esboço:



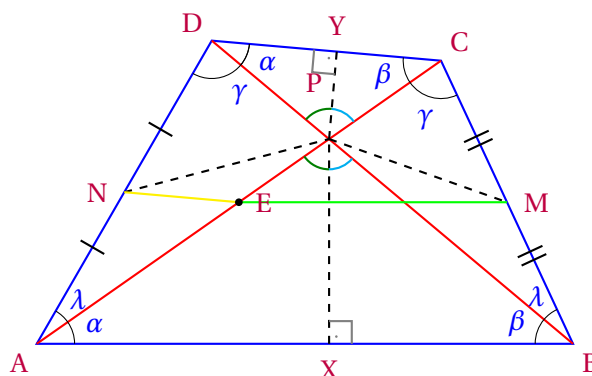
Como $ABCD$ é inscritível, tem-se que $\angle BDC = \angle CAB = \alpha$, $\angle DBA = \angle DCA = \beta$, $\angle ADB = \angle ACB = \gamma$ e $\angle DAC = \angle DBC = \lambda$. Ademais, tem-se que PX e PY são alturas dos triângulos ABP e CDP , respectivamente.

Portanto, tem-se que os triângulos CDP e ABP são semelhantes e, daí, tem-se que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{XP}{YP}.$$

Seja E o ponto médio de AC (esboço abaixo). Como M e N são pontos médios de AD e BC respectivamente, temos que EM e EN são bases médias de ABC e CDA , respectivamente, e, portanto

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EM}{EN} = \frac{XP}{YP} \quad (1).$$

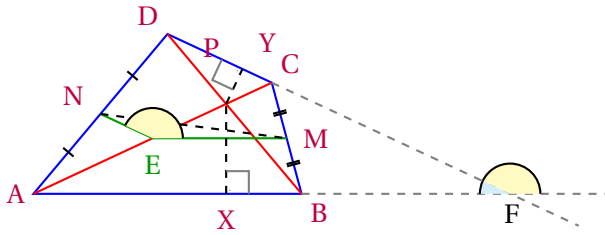


Ademais, $EM \parallel AB$ e $EN \parallel CD$.

Pela conclusão anterior, sem perda de generalidade, pode-se inferir que PX é perpendicular à reta suporte de EM , chamemo-la de r . Analogamente, PY é perpendicular à reta suporte de EN , chamemo-la de s .

Analisando os ângulos $\angle NEM$ e $\angle YPX$, tem-se que ambos são congruentes.

Prova: Como $EM \parallel AB$ e $EN \parallel CD$, ao prolongar os lados AB e CD , eles se encontram num ponto F , o ângulo obtuso formado entre os prolongamentos é congruente ao ângulo $\angle NEM$.



Analisando o quadrilátero $FYPX$ formado, tem-se, na soma dos ângulos internos, que:

$$\angle XFY + 90^\circ + 90^\circ + \angle YPX = 360^\circ$$

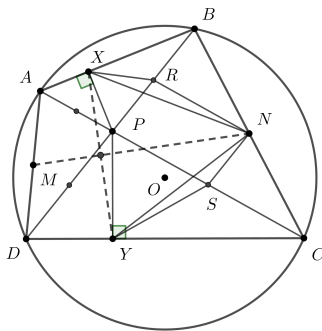
$$\Leftrightarrow \angle YPX = 180^\circ - \angle XFY$$

$$\Leftrightarrow \angle YPX = \angle NEM \quad (2)$$

Logo, pelas equações (1) e (2), tem-se que NEM e XYP são triângulos semelhantes devido ao caso LAL de semelhança.

Como visto anteriormente, $PX \perp r \supset EM$ e $PY \perp s \supset EN$; então, obrigatoriamente, $MN \perp XY$. Isso é comprovado pelo fato de que a relação de semelhança consiste em realizar, no máximo, rotações e translações. Assim, ao realizar algum desses movimentos de tal forma que dois pares de lados homólogos sejam perpendiculares entre si, então o terceiro par também será perpendicular.

Segunda solução:



Sejam R e S os pontos médios de BP e CP , respectivamente. Os triângulos XRN e NSY são congruentes pelo caso LAL . Daí $XN = NY$. De forma análoga, $MX = MY$. Portanto, MN é a mediatriz de XY .

Problema 13. Uma máquina tem dois botões: um deles dobra um número inteiro e o outro o aumenta em 1 unidade. Por exemplo, apertando os botões dessa máquina é possível realizar as seguintes operações:

$$1 \rightarrow_{+1} 2 \rightarrow_{\times 2} 4 \rightarrow_{+1} 5.$$

Se no início você começa com o número 0, qual é o número mínimo de vezes que você precisa apertar botões dessa máquina para obter:

- 100?
- 2024?

Solução:

Podemos considerar o problema reverso de transformar o número inteiro n em 0 por meio de duas operações: dividir por 2 ou subtrair 1. Seja $r(n)$ o número mínimo de movimentos para transformar n em 0 com essas duas operações. Claramente, $r(2n+1) = r(2n) + 1$, pois não podemos dividir por 2. Vamos provar por indução que $r(2k) = 1 + r(k)$. Para $k = 1$ é imediato. Suponha que já provamos para todos os números pares menores que $2k$. Se aplicarmos a operação de subtrair 1 de $2k$, o número mínimo de operações para obter 0 não será menor que $1 + r(2k-1) = 2 + r(2k-2) = 3 + r(k-1)$. Por outro lado, se aplicarmos a operação de dividir por 2 primeiro, o número de operações será $1 + r(k) \leq 2 + r(k-1)$. Ou seja, começar dividindo por 2 é mais vantajoso. Em geral, se $n = 2^{k_1} + 2^{k_1+k_2} + \dots + 2^{k_1+k_2+\dots+k_m}$, segue que

$$\begin{aligned} r(n) &= k_1 + r(n/2^{k_1}) \\ &\dots \\ &= (k_1 + k_2 + \dots + k_m) + m. \end{aligned}$$

- Como $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$, segue que $r(100) = 6 + 3 = 9$.
- Como $2024 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3$, segue que $r(2024) = 17$.

Novos Problemas

Problemas Universitários

Problema 14. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine a soma dos elementos da matriz A^{2026}

Problema 15. Calcule

$$\int_{-1}^1 \frac{x+1+\sqrt{1+x^2}}{2(1+x^2)(1+\sqrt{1+x^2})} dx$$

Problema 16. Seja p um primo e $0 \leq k \leq p-1$ um inteiro. Mostre que

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$$

Problema 17. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\det A = -1$. Mostre que $\det(A^2 + I_2) \geq 4$. Quando a igualdade é válida?

Problema 18. Para cada função contínua $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, seja $I(f) = \int_0^1 x^2 f(x) dx$ e $J(f) = \int_0^1 x f^2(x) dx$. Encontre o valor máximo de $I(f) - J(f)$ sobre todas essas funções.

Problemas de Matemática Elementar

Problema 19. Qual é o primeiro algarismo após a vírgula da representação decimal de $\sqrt{9 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100}$?

Problema 20. A função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $f(1) = 2027$ e, para $n > 1$,

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 \cdot f(n).$$

Qual é o valor de $f(2027)$?

Problema 21. Elaís observa “palavras” compostas por n caracteres, cada um igual a ‘E’ ou ‘L’. Em cada jogada, Elaís pode substituir ‘EL’ em qualquer lugar da palavra por ‘LE’. Por exemplo, em duas jogadas, ela transforma a palavra ‘LEELEELLE’ na palavra ‘LEELEELLE’.

$$LEELEELLE \rightarrow LEELEELLE \rightarrow LEELEELLE$$

Se não houver ‘L’ imediatamente à direita de um ‘E’, Elaís não pode fazer uma jogada.

- Qual é o número máximo de jogadas que Elaís pode fazer na palavra LEELEELLE?
- Dentre todas as palavras de 20 letras, qual é o valor máximo possível de jogadas que ela pode fazer?

Problema 22. Estão escritas no quadro n unidades consecutivas. Entre algumas delas, colocam-se sinais “+” e calcula-se a soma obtida. Por exemplo, se estiverem escritas 10 unidades, pode-se obter a soma 136:

$$1 + 1 + 111 + 11 + 11 + 1 = 136.$$

a) Se $n = 53$, é possível obter a soma 116?

b) Se $n = 53$, é possível obter a soma 117?

c) Qual é a maior soma de quatro algarismos que se pode obter se $n = 53$?

Problema 23. Prove que

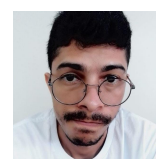
$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2}$$

para todo $n \geq 2$.

Problema 24. Suponha que x e y são maiores que 0. Vamos denotar o mínimo de x , $\frac{1}{y}$ e $y + \frac{1}{x}$ por S , isto é, $S = \min\{x, \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x}\}$. Qual é o valor máximo possível para S ?



Samuel Feitosa é professor na Universidade Federal da Bahia desde 2012. Foi medalhista de Bronze na Olimpíada Internacional de Matemática em 2003 e é membro da Comissão Nacional de Olimpíadas de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Contribui ativamente na organização de olimpíadas e treinamentos de alunos para diversas competições matemáticas nacionais e internacionais.



Yure Carneiro de Oliveira graduou-se e fez mestrado em matemática na UFBA, onde também realiza seu doutorado em matemática na área de Probabilidade. Após quase concluir um mestrado em estatística, ingressar em uma outra graduação e começar a estudar violino, agora está focado na conclusão do doutorado.