Técnica

Equações de $3^{\underline{o}}$ grau

Armando Barbosa

Introdução

A busca por soluções explícitas de equações polinomiais envolvendo radicais é um dos episódios mais fascinantes do desenvolvimento da matemática. Ele se inicia ainda na antiguidade com fórmulas conhecidas dos babilônicos e atinge o seu ápice no século XIX com os trabalhos Abel e Galois.

O objetivo deste artigo é apresentar aplicações das fórmulas de Tartaglia–Cardano, que surgiram no Renascimento Italiano, para solucionar equações de $3^{\underline{o}}$ grau em problemas de vestibulares e olimpíadas de matemática. No final, também discutiremos brevemente fórmulas por radicais para equações de graus maiores.

Uma equação do $3^{\underline{o}}$ grau de coeficientes reais na variável x é uma expressão algébrica da forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O Teorema Fundamental da Álgebra garante que essa equação possui três soluções complexas, contando-se multiplicidades. Estamos interessados em saber quais são os três valores complexos de x que satisfazem a equação acima. Para isso, podemos dividir a estratégia para obter uma fórmula para esses valores em três partes:

1. Eliminar o coeficiente de x^2 através de uma mudança de variável que crie uma nova equação do $3^{\underline{o}}$ grau cuja soma das raízes é nula;

2. Realizar uma nova mudança de variável, reduzindo o problema de determinar uma raiz da equação do $3^{\underline{o}}$ grau do passo anterior à resolução de uma equação do $2^{\underline{o}}$ grau com raízes u^3 e v^3;

3. Perceber que as outras duas soluções, além de $u + v$, conjugadas ou não, são $uw + vw^2$ e $uw^2 + vw$, sendo $w = \operatorname{cis} 120°$.

Expliquemos agora cada um desses passos com mais detalhes.

Eliminando o termo quadrático

Dividindo a equação original por a, temos que

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Pelas relações de Girard, as três soluções x_1, x_2 e x_3 somadas resultam em $-\frac{b}{a}$. Daí, considerando a substituição de variáveis

$$t = x + \frac{b}{3a} \Leftrightarrow x = t - \frac{b}{3a},$$

teremos que

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 &= (x_1 + \frac{b}{3a}) + (x_2 + \frac{b}{3a}) + (x_3 + \frac{b}{3a}) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + 3 \cdot \frac{b}{3a} \\ &= -\frac{b}{a} + \frac{b}{a} = 0, \end{aligned}$$

e a soma das raízes na variável t será igual a 0. Substituindo, então, na equação do $3^{\underline{o}}$ grau, podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
&\left(t-\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{b}{a}\cdot\left(t-\frac{b}{3a}\right)^2+\frac{c}{a}\cdot\left(t-\frac{b}{3a}\right)+\frac{d}{a}=0\\
&\therefore t^3-3t^2\cdot\frac{b}{3a}+3t\cdot\frac{b^2}{9a^2}-\frac{b^3}{27a^3}+\\
&t^2\cdot\frac{b}{a}-2t\cdot\frac{b^2}{3a^2}+\frac{b^3}{9a^3}+\\
&t\cdot\frac{c}{a}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}=0\\
&\therefore t^3+t\left(\frac{b^2}{3a^2}-2\frac{b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}\right)+\left(-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{b^3}{9a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}\right)=0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\boxed{t^3+t\left(\frac{-b^2+3ac}{3a^2}\right)+\left(\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}\right)=0,}$$

e o termo quadrático foi eliminado.

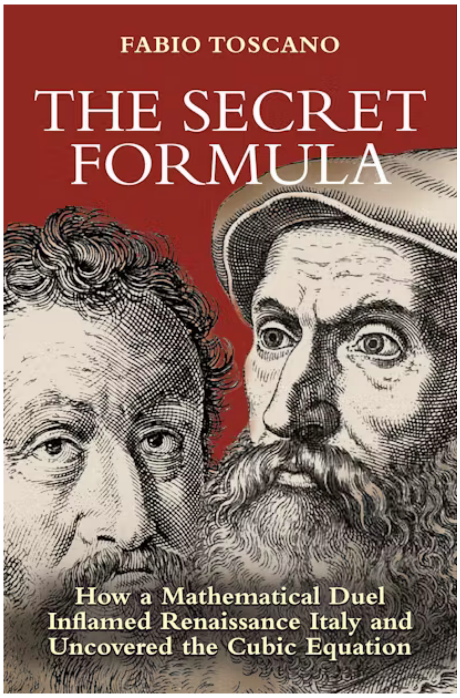


Figura 1: "Niccolò Tartaglia (à direita) era um professor ambicioso que possuía uma fórmula secreta — a chave para desvendar um problema matemático aparentemente insolúvel. Gerolamo Cardano (à esquerda) era um médico, erudito brilhante e notório jogador que não hesitaria em usar bajulação e até mesmo artimanhas para descobrir o segredo de Tartaglia." [1]

Redução para uma equação quadrática

Sejam

$$p=\frac{-b^2+3ac}{3a^2}\ \text{ e }\ q=\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}.$$

Daí, temos que

$$t^3+pt+q=0.$$

Considerando a nova substituição de variáveis

$$t=u+v,$$

podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
&(u+v)^3+p\cdot(u+v)+q=0\\
&\therefore u^3+v^3+3uv\,(u+v)+p\cdot(u+v)+q=0\\
&\therefore \left(u^3+v^3+q\right)+(u+v)\cdot\left(3uv+p\right)=0.
\end{aligned}
$$

Podemos, então, definir u e v de modo a zerar as duas parcelas acima. Para isso, basta escolher u e v tais que

$$\left\{\begin{aligned} u^3+v^3+q &=0\\ 3uv+p &=0, \end{aligned}\right. \qquad \text{(I)}$$

de modo que obtemos o sistema

$$\left\{\begin{aligned} u^3+v^3 &=-q\\ u^3v^3 &=-\frac{p^3}{27} \end{aligned}\right. , \qquad \text{(II)}$$

em u^3 e v^3. Note que toda soluçao de (I) é uma solução de (II), mas a recíproca não é necessariamente verdadeira, se considerarmos u e v complexos. Ou seja, devemos verificar posteriormente quais soluções de (II) satisfazem (I).

De todo modo, pelas relações de soma e produto, podemos concluir que u^3 e v^3 são raízes da equação do 2º grau em z dada por

$$z^2-(u^3+v^3)z+u^3v^3=0,$$

ou seja,

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0.$$

Portanto, temos que

$$z=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{2},$$

e definindo $\Delta=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}$, temos que

$$z=\frac{-q\pm\sqrt{4\Delta}}{2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\Delta}.$$

Logo,

$$\left\{\begin{aligned} u^3 &=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}\\ v^3 &=-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta} \end{aligned}\right. .$$

Lembrando que $x = t - \frac{b}{3a}$ e

$$t = u + v = \sqrt[3]{u^3} + \sqrt[3]{v^3},$$

obtemos finalmente que

$$\boxed{x = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}},$$

que é a fórmula de Tartaglia–Cardano para uma das raízes da equação do 3º grau. Mais adiante entenderemos o que acontece nos casos em que $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.

Fórmulas para as demais raízes

Se $\omega = \operatorname{cis}(120°) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, podemos escrever

$$\begin{cases} (u\omega)^3 + \left(v\omega^2\right)^3 & = u^3 + v^3 \\ (u\omega)^3 \cdot \left(v\omega^2\right)^3 & = u^3 v^3 \end{cases},$$

já que $\omega^3 = 1$. Assim o par $u\omega$ e $v\omega^2$ satisfaz os mesmo sistemas que u e v (por outro lado, o par $u\omega$ e $v\omega$ satisfaz o sistema (II), mas não o (I), assim um elemento do par deve ter o ω e o outro ω^2 para satisfazer (I)). Logo $u\omega + v\omega^2$ também é raiz da mesma equação de 3º grau em t encontrada no passo anterior. O mesmo vale para $u\omega^2 + v\omega$, que é o conjugado de $u\omega + v\omega^2$ quando u e v são reais, pois $\omega^2 = \overline{\omega}$. Portanto, as três raízes de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ são da forma

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \\ x_2 &= -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} \cdot w + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \cdot w^2 \\ x_3 &= -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} \cdot w^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \cdot w \end{aligned}$$

onde,

$$q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}$$

e

$$p = \frac{-b^2 + 3ac}{3a^2}.$$

Assim como ocorre nas equações de 2º grau, o valor

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

é muito importante, uma vez que seu sinal ajuda a entender quando temos raízes reais. Vamos ver como isso acontece através de alguns problemas.

Problemas

Seja $x_i = -\frac{b}{3a} + t_i$. Como $-\frac{b}{3a}$ é um número real, x_i é real se, e somente se, t_i é real. Portanto, para encontrar as raízes reais, podemos nos ater a estudar apenas equações do tipo $t^3 + pt + q = 0$.

Problema 1. *Calcule o valor de*

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Solução: Considere os números reais u e v tais que

$$u^3 = 20 + 14\sqrt{2} \qquad v^3 = 20 - 14\sqrt{2}$$

Note que $u^3 + v^3 = 40$ e $u^3 v^3 = 400 - 392 = 8 = 2^3$. Como

$$(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v),$$

se $t = u + v$, que é o valor procurado, obtemos

$$t^3 - 6t - 40 = 0.$$

Pelo teste da raiz racional, testando os divisores de -40, temos que $t = 4$ é raiz. Dividindo por $(t - 4)$, podemos concluir que

$$t^3 - 6t - 40 = (t - 4) \cdot \left(t^2 + 4t + 10\right)$$

$$t_1 = 4 \qquad t_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{2} = -2 \pm i\sqrt{6}$$

Logo, nossa resposta é $t = 4$, pois $-2 \pm i\sqrt{6} \notin \mathbb{R}$. ■

Na notação anterior, considerando a equação $t^3 - 6t - 40 = 0$, temos que

$$p = -6, \quad q = -40$$

e

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \\ &= \frac{(-40)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27} \\ &= 392 > 0 \end{aligned}$$

Daí, as raízes t_2 e t_3 e, consequentemente, x_2 e x_3 não são reais, pois teremos valores reais distintos

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} \text{ e } \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

multiplicados por $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e por $w^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ na fórmula encontrada no final da seção anterior, produzindo necessariamente um número com parte imaginária não nula.

Vejamos agora um exemplo com $\Delta < 0$ ao trocarmos o -40 por $+4$ na última equação:

Problema 2. *Determine todas as soluções de $t^3-6t+4=0$.*

Solução: Pelo teste da raiz racional, testando os divisores de $+4$, temos que $t_1=2$ é raiz.

Dividindo por $(t-2)$, podemos concluir que

$$t^3-6t+4=(t-2)\cdot\left(t^2+2t-2\right)$$
$$t_1=\boxed{2}\qquad t_{2,3}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=\boxed{-1\pm\sqrt{3}}$$

■

Repetindo a analise anterior para $t^3-6t+4=0$, temos que

$$p=-6,\quad q=4$$

e

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\\ &= -4.\end{aligned}$$

Calculemos t_1 pela fórmula, lembrando que $-2\pm 2i=\sqrt{8}\cdot\text{cis}\,(\pm 135°)$:

$$\begin{aligned}t_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\\ &= \sqrt[3]{-2+2i}+\sqrt[3]{-2-2i}\\ &= \sqrt{2}\cdot\left(\text{cis}\left(45°\right)+\text{cis}\left(-45°\right)\right)\\ &= 2\sqrt{2}\cdot\cos\left(45°\right)\\ &= 2.\end{aligned}$$

Calculando agora t_2:

$$\begin{aligned}t_2 &= \sqrt[3]{-2+2i}\cdot w+\sqrt[3]{-2-2i}\,w^2\\ &= \sqrt[3]{-2+2i}\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt[3]{-2-2i}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\end{aligned}$$

Analisando a expressão acima, é difícil acreditar que t_2 é um número real. Porém, podemos simplificá-la:

$$\begin{aligned}t_2 &= \sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(45°\right)\cdot w+\sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(-45°\right)\cdot w^2\\ &= \sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(45°\right)\cdot w+\sqrt{2}\cdot\overline{\text{cis}\,(45°)}\cdot\overline{w}\\ &= \sqrt{2}\cdot\left(2\text{Re}\left(\text{cis}\,45°\cdot w\right)\right)\\ &= 2\sqrt{2}\cdot\cos\left(165°\right)\\ &= -\sqrt{3}-1\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

De modo análogo, podemos obter $t_3=\sqrt{3}-1\in\mathbb{R}$.

Isso é o que ocorre com qualquer equação cúbica com Δ negativo, pois

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}\text{ e }-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta},$$

são números complexos conjugados, cujas raízes cúbicas também são conjugadas. Assim, ao multiplicá-las por w e $w^2=\overline{w}$, respectivamente, as partes imaginárias se cancelam e obtemos três soluções reais. O caso $\Delta=0$ gera $t_2=t_3$, sendo um número real, pois cancelam-se as partes imaginárias.

Em resumo, obtemos o seguinte resultado geral:

$\Delta>0$	1 raiz real e 2 raízes complexas conjugadas
$\Delta<0$	3 raízes reais e distintas
$\Delta=0$	3 raízes reais, sendo pelo menos 2 iguais

Problema 3. (IME/2025) *A equação $x^3-\alpha x+\beta=0$, onde α e β são constantes reais, admite raiz não real de módulo γ. Determine α em função de β e γ.*

Solução: Se admite raiz não real g, conforme vimos anteriormente considerando $x=u+v$, temos que

$$(I)\begin{cases}u^3+v^3=-\beta\\ 3uv=\alpha\end{cases}\qquad\begin{cases}g=u\omega+v\omega^2\\ \omega=\text{cis}\,(120°)\qquad\gamma=|g|\end{cases}$$

$$\Rightarrow\gamma^2=\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(u+v)\right]^2+\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(u-v)\right]^2$$

$$\gamma^2=\frac{1}{4}\cdot\left[(u+v)^2+3\,(u-v)^2\right]\Rightarrow\boxed{\gamma^2=u^2+v^2-uv}\quad(II)$$

$$\gamma^2=u^2+v^2-uv=(u+v)^2-3uv$$

$$\overset{(I)}{\Longrightarrow}u^3+v^3=-\beta\overset{(II)}{\Longrightarrow}(u+v)=\frac{-\beta}{\gamma^2}$$

$$\overset{(I)}{\Longrightarrow}\gamma^2=(u+v)^2-3uv=\left(\frac{-\beta}{\gamma^2}\right)^2-\alpha\Rightarrow\boxed{\alpha=\frac{\beta^2}{\gamma^4}-\gamma^2}$$

■

Problema 4. *Encontre o valor de* $\text{sen}\,18°$.

Solução: A partir da identidade $\text{sen}\,3x=3\,\text{sen}\,x-4\,\text{sen}^3\,x$ podemos concluir que

$$\begin{aligned}4\,\text{sen}^3\,18°-3\,\text{sen}\,18° &= -\text{sen}\,54°\\ &= -\cos 36°\\ &= -1+2\,\text{sen}^2\,18°\end{aligned}$$

Se $x=\text{sen}\,18°$, temos $4x^3-2x^2-3x+1=0$. Como $x=1$ é raiz, segue que $4x^3-2x^2-3x+1=(x-1)\cdot\left(4x^2+2x-1\right)=0$. Daí, como $\text{sen}\,18°\neq 1$, temos $\text{sen}\,18°=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Dado que $\text{sen}\,18°>0$, obtemos $\text{sen}\,18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Considerações sobre equações de graus maiores

Para equações do 4º grau, também existe um método para a obtenção de fórmulas para as raízes por meio de radicais conhecido como método de Ferrari. Para equações de grau $\geqslant 5$, tem-se o teorema de Abel-Ruffini que afirma que não há uma solução geral através de operações com radicais, incluindo soma, subtração, multiplicação e divisão envolvendo os coeficientes da equação polinomial.

Notemos que isso não significa que é impossível resolver qualquer uma dessas equações de grau $\geqslant 5$. Por exemplo, a equação do 6º grau

$$x^6 - 9x^3 + 8 = 0$$

pode ser completamente resolvida e reduzida para um caso já estudado realizando a troca de x^3 por y. A nova equação possui raízes $y = 1$ e $y = 8$. Daí,

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x^3 = 1 \Rightarrow x = 1, \omega, \omega^2 \\ y = x^3 = 8 \Rightarrow x = 2, 2\omega, 2\omega^2 \end{cases}$$

Além disso, por vezes, podemos adaptar as ideias apresentadas para situações parecidas. Por exemplo, para a equação do 5º grau

$$x^5 + px^3 + \frac{p^2}{5}x + q = 0,$$

sendo p um valor dado, podemos fazer a mudança $x = u + v$ para obter que

$$\begin{gathered} (u+v)^5 + p\cdot(u+v)^3 + \frac{p^2}{5}\cdot(u+v) + q = 0 \\ \therefore \left(u^5+v^5\right) + 5uv(u+v)^3 - 5u^2v^2(u+v) + p(u+v)^3 \\ + \frac{p^2}{5}(u+v) + q = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} u^5 + v^5 = -q \\ 5uv = -p \Rightarrow u^5v^5 = -\dfrac{p^5}{5^5} \end{cases} \\ \Rightarrow u^5, v^5 \text{ são raízes de } z^2 + qz - \frac{p^5}{5^5} = 0 \end{gathered}$$

Problema 5. (Bulgária/2023 - Outono) *Encontre todas as soluções da equação*

$$(x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + x\sqrt{x^2+1} = 0.$$

Solução: Passando o segundo termo para o outro lado e elevando ao quadrado, temos que

$$(x+1)^2\left[(x+1)^2+1\right] = x^2\left(x^2+1\right)$$

A expressão $t(t+1)$ é crescente para $t \geqslant 0$.

Logo, temos que

$$(x+1)^2 = x^2 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

que é a única solução. ■

Para finalizar, deixaremos duas questões de equações de 3º grau de treino para o leitor.

Problema 6. *Determine todas as raízes das equações do 3º grau a seguir:*

1. $t^3 - 6t - 9 = 0$;
2. $t^3 - 6t - 4 = 0$.

Problema 7. (Hong Kong/2014 - adaptada) *Determine o valor simplificado de* $\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^{2014}$.

Respostas

Problema 6. 1. 3 *e* $-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

2. -2 *e* $1 \pm \sqrt{3}$.

Problema 7. 5^{1007}. *Uma ideia é fazer* $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$, $b = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ *e* $x = a + b$ *para chegar a*

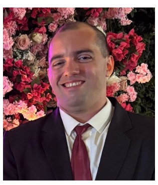
$$x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = 2\sqrt{5} + 3x.$$

Daí, basta perceber que $x = \sqrt{5}$ é raiz e as outras raízes são complexas, podendo só dividir por $\left(x - \sqrt{5}\right)$ para concluir isso.

Portanto, $x = \sqrt{5}$ e $x^{2014} = \boxed{5^{1007}}$.

Bibliografia

[1] Toscano, Fábio. *A Fórmula Secreta*. Editora Unicamp, São Paulo, 2012.



José Armando Barbosa Filho é iteano, ex-olímpico e trabalha olimpíadas de matemática desde 2012. Os principais destaques de sua carreira são os livros da coleção IME/ITA/Cone Sul/EGMO, da qual se orgulha de ser o autor, e ter sido vice-líder da equipe do Brasil na IMO/2018. Atualmente, está vivendo os primeiros dias de pai do José Heitor. Muito *nerd* a ponto de ser fã do personagem Leonard Hofstadter, da série *The Big Bang Theory*.