PROBLEMA

O Método de Heron e Outros Problemas

Yure Carneiro e Samuel Feitosa

Soluções da Edição Anterior

Problemas Universitários

Problema 1. *Sejam $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ subconjuntos não vazios de $\{1, 2, \dots, n\}$. Prove que existem conjuntos de índices disjuntos e não vazios $I, J \subset \{1, 2, \dots, n+1\}$ tais que*

$$\bigcup_{k \in I} A_k = \bigcup_{k \in J} A_k.$$

Solução:

Considere a matriz $A = (a_{ij})_{i,j}^{n,n+1}$ (n linhas e $n+1$ colunas) definida da seguinte maneira:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in A_j \\ 0, & \text{se } i \notin A_j \end{cases}.$$

Ou seja, dispomos os conjuntos $A_1, \dots, A_{n+1}$ como vetores colunas $\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_{n+1}$ representando as indicadoras da $n-$upla ordenada $(1, 2, \dots, n)$ em cada um dos conjuntos. Por hipótese, como cada um deles é não vazio, significa que os vetores colunas dessa matriz são não nulos.
Agora, sendo o posto da matriz A no máximo n, então o números de colunas linearmente independentes é no máximo n, de onde segue que, $\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_{n+1}$ são linearmente dependentes. De onde segue que, existem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$, não todos nulos, para os quais

$$\alpha_1 \overline{A}_1 + \cdots + \alpha_{n+1} \overline{A}_{n+1} = 0.$$

Como todos esses vetores são não nulos e com entradas 0 ou 1 (não negativas), segue que existem entre esses escalares, alguns que são positivos ($\alpha_i > 0$) e alguns que são negativos ($\alpha_j < 0$). Considere então I e J os conjuntos destes escalares que são positivos e negativos, respectivamente (são não vazios e disjuntos). Daí,

$$v = \sum_{i \in I} \alpha_i \overline{A}_i = \sum_{j \in J} (-\alpha_j) \overline{A}_j.$$

Essa igualdade entre as duas representações do vetor v acima (que possui entradas não negativas), em termos dos conjuntos A_k significa que, se a entrada ℓ de v é diferente de 0, então $\ell \in A_i, A_j$ para algum $i \in I$ e $j \in J$. Agora, se a entrada ℓ de v é igual a 0, então $\ell \notin A_i, A_j$ para todos $i \in I$ e $j \in J$. Ou seja,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Problema 2. *Dizemos que um grupo $G = (G, *)$ tem raiz se existe um grupo $H = (H, \cdot)$ de tal sorte que G é isomorfo a $H \times H$. Mostre que o grupo $(\mathbb{R}, +)$ possui raiz.*
Dica: Tente ver a possível raíz como um subespaço vetorial de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Como construir uma base para esse espaço vetorial?

Solução de Rafael A. da Ponte

Suponha que $(\mathbb{R}, +)$ possui uma raiz X via um isomorfismo ϕ. Podemos considerá-la como um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ identificando X com a imagem por ϕ de $X \times 0$. É simples de ver que X, com as operações usuais, é um subespaço de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. De fato, dado qualquer natural q e um elemento $x \in X$, existe (a, b) em $X \times X$ tal que $q \cdot (a, b) = (x, 0)$ e, portanto, $b = 0$. Assim, $a \in X$ é tal que $a = x/q$ e daí segue da estrutura de grupo que X é fechado por produto por escalar racional.

Disso segue que X é raiz de $\mathbb{R}$, por analogia ao conceito definido no enunciado, também como estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Feito isso, note que se B é base de Hamel de X, $B \times \{0\} \cup \{0\} \times B$ é base de $X \times X$ e suas imagens serão uma base de Hamel de $\mathbb{R}$. Daí, o problema de achar uma raiz de $(\mathbb{R}, +)$ resume-se a, dada uma base de Hamel H de $\mathbb{R}$, encontramos um subconjunto B contido em H em bijeção com $H \setminus B$.

Para isso, defina o conjunto dos pares (C, f), C contido em H e $f : C \to H \setminus C$ injetivas ordenado com $(C, f) \leq (D, g) \Leftrightarrow C \subset D$ e g estende f. Esse conjunto satisfaz as condições do Lema de Zorn, logo tem um elemento maximal (B, h). Agora, em virtude da maximalidade, $(H \setminus B) \setminus h(B)$ tem, no máximo, um elemento, e em ambos os casos de cardinalidades de $(H \setminus B) \setminus h(B)$, B é um subconjunto como pedimos no parágrafo acima.

Problema 3. *Seja G um conjunto finito de matrizes $n \times n$ de coeficientes reais $\{M_i\}$, $1 \leq i \leq r$, que forma um grupo sobre a multiplicação matricial. Suponha que $\sum_{i=1}^{r} tr(M_i) = 0$, onde $tr(A)$ denota o traço da matriz A. Prove que $\sum_{i=1}^{r} M_i$ é a matriz nula.*

Solução:

Seja $S = \sum_{i=1}^{r} M_i$. Para qualquer j, a sequência $M_j M_1, M_j M_2, \ldots, M_j M_r$ é uma permutação dos elementos de G. Somando todos eles, obtemos $M_j S = S$. Somando essas expressões de $j = 1$ até r resulta em $S^2 = rS$. Portanto, o polinômio minimal de S divide $x^2 - rx$ e, consequentemente, todo autovalor de S é 0 ou r. Por outro lado, soma dos autovalores, contados com multiplicidade, é $\text{tr}(S) = 0$, então todos os autovalores são iguais a 0. Todo autovalor de $S - rI$ é $-r \neq 0$, logo $S - rI$ é invertível. Portanto, de $S(S - rI) = 0$, obtemos $S = 0$.

Problema 4. *Seja $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots + a_n \operatorname{sen} nx$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais e n é um inteiro positivo. Dado que $|f(x)| \leq |\operatorname{sen} x|$ para todo o número real x, prove que*

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leq 1.$$

Solução de Yan Lima Machado:

Dado o $f(x)$ do enunciado, tem-se que

$$f'(x) = a_1 \cdot \cos(x) + 2 \cdot a_2 \cdot \cos(2x) + \ldots + n \cdot a_n \cdot \cos(nx).$$

Daí, nota-se que

$$\begin{aligned} taf(0) &= a_1 \cdot sen(0) + a_2 \cdot sen(0) + \ldots + a_n \cdot sen(0) \\ &= 0; \\ f'(0) &= a_1 \cdot \cos(0) + 2 \cdot a_2 \cdot \cos(0) + \ldots + n \cdot a_n \cdot \cos(0); \\ &= a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + n \cdot a_n. \end{aligned}$$

Portanto, basta mostrarmos que $|f'(0)| \leq 1$. Pelo enunciado, $|f(x)| \leq |\text{sen}(x)|$, então supondo que $x \neq 0$, tem-se que

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{\text{sen}(x)}{x}\right|.$$

Daí

$$|f'(0)| = \left|\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| \leq \left|\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}\right| = 1.$$

Problema 5. *Calcule a integral*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}^{25} x}{\cos^{25} x + \text{sen}^{25} x} dx.$$

Solução de Yan Lima Machado:

Denote o valor da integral acima por I. Fazendo a mudança de variável $u = \frac{\pi}{2} - x$, tem-se que

$$\frac{\text{sen}^{25}(x)}{\text{sen}^{25}(x) + \cos^{25}(x)} = \frac{\cos^{25}(u)}{\cos^{25}(u) + \text{sen}^{25}(u)}.$$

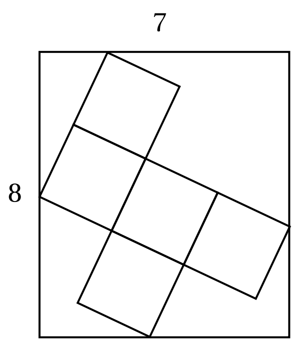
Além do mais, $du = -dx$ para $x = 0$ temos $u = \pi/2$ e para $x = \pi/2$, temos $u = 0$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}^{25}(x)}{\text{sen}^{25}(x) + \cos^{25}(x)}\, dx = \\ -&\int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos^{25}(u)}{\text{sen}^{25}(u) + \cos^{25}(u)}\, du = \\ &\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{25}(x)}{\text{sen}^{25}(x) + \cos^{25}(x)}\, dx. \end{aligned}$$

Portanto, $I + I = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \pi/2$ e, consequentemente, $I = \frac{\pi}{4}$.

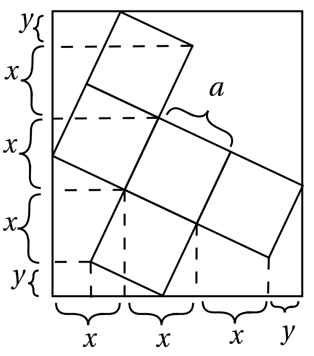
Problemas de Matemática Elementar

Problema 6. *A figura a seguir consiste de 5 quadrados iguais colocados no interior de um retângulo $8cm \times 7cm$. Qual a medida do lado desses quadrados?*



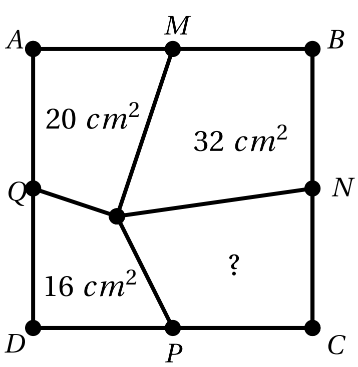
Solução:

Seja a o comprimento do lado do quadrado. Como as inclinações dos lados dos quadrados formam 90° entre si, só existem dois comprimentos possíveis de projeções dos lados dos quadrados sobre os lados dos retângulos: x ou y.



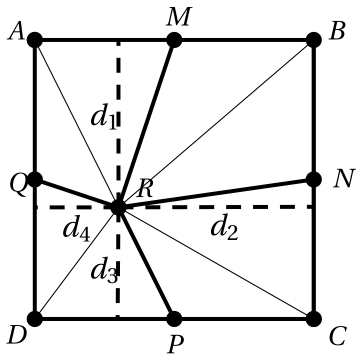
Comparando as medidas dos dois lados dos retângulos com essas projeções, temos $8 = 2x + y + x + y = 3x + 2y$ e $7 = 3x + y$. Resolvendo o sistema resultante, encontramos $x = 2$ e $y = 1$. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, $a = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}\,cm$.

Problema 7. *Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado e M, N, P e Q são os pontos médios dos seus lados. As áreas de três regiões do seu interior são $20\,cm^2$, $32\,cm^2$ e $16\,cm^2$, também como indicado na figura. Qual a área da quarta região?*



Solução:

Seja R o ponto central da figura, $2x$ o comprimento de metade de um lado do quadrado e d_1, d_2, d_3 e d_4 as distâncias de R aos lados.



A área do quadrilátero $DPRQ$ é a soma das áreas de dois triângulos de bases de comprimento $2x$ e alturas d_3 e d_4. Ou seja,

$$A_{DPRQ} = \frac{2x \cdot d_3}{2} + \frac{2x \cdot d_4}{2} = x \cdot (d_3 + d_4).$$

De modo semelhante,

$$A_{AQRM} = x \cdot (d_1 + d_4), A_{BMRN} = x \cdot (d_1 + d_2)$$

$$\text{e } A_{CNRP} = x \cdot (d_2 + d_3).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A_{CNRP} + A_{AQRM} &= A_{BMRN} + A_{DPRQ} \\ A_{CNRP} + 20 &= 32 + 16. \end{aligned}$$

Assim, $A_{CNRP} = 32 + 16 - 20 = 28\,cm^2$.

Problema 8. *Dois inteiros positivos x e y são tais que*

$$\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}.$$

Encontre o menor valor possível para a soma $x + y$.

Solução de Yan Lima Machado:

A desigualdade acima pode ser reescrita como:

$$\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012} \Leftrightarrow$$
$$1 - \frac{1}{2011} < 1 - \frac{t}{y} < 1 - \frac{1}{2012} \Leftrightarrow$$
$$2011 < \frac{y}{t} < 2012.$$

com $t = y - x \in \mathbb{Z}$. Devemos ter $t \geq 2$, pois para $t = 1$ não existe um inteiro y tal que $2011 < y < 2012$. Da desigualdade $2011 \cdot t < y < 2012 \cdot t$, tem-se que $y \geq 2011 \cdot t + 1$. Daí:

$$\begin{aligned} x + y &= (y - t) + y \\ &= 2y - t \\ &= 2 \cdot (2011 \cdot t + 1) - t \\ &= 4021 \cdot t + 2. \end{aligned}$$

Como $t \geq 2$, tem-se que o menor valor possível para $x+y$ é

$$x+y=4021\cdot 2+2=8042+2=8044.$$

Um exemplo é $x=4021$ e $y=4023$.

Problema 9. *Sejam a, b e c reais satisfazendo $a+b+c=0$ e $a^2+b^2+c^2=4$. Qual o valor de $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$?*

Solução:
Veja que

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2=0.$$

De onde,

$$ab+bc+ca=-2$$

(pois $a^2+b^2+c^2=4$).

Assim,

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2(ab^2c+bc^2a+ca^2b)=$$

$$(ab+bc+ca)^2=(-2)^2=4$$

$$\therefore (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2abc(a+b+c)=4$$

$$\therefore (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2=4.$$

Problema 10. *Mostre que*

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}>\frac{9}{2}.$$

Solução:
Note que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}&=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\\&=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}\\&=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}&=\sum_{n=1}^{99}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\\&=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=9.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$$

$$\sum_{k=0}^{49}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+2}}>\sum_{k=0}^{48}\frac{1}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k+3}}$$

e

$$\sum_{k=0}^{49}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+2}}+\sum_{k=0}^{48}\frac{1}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k+3}}=$$

$$\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=9.$$

Portanto,

$$2\sum_{k=0}^{49}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+2}}>9$$

e

$$\sum_{k=0}^{49}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+2}}>\frac{9}{2}.$$

Problema 11. *Em uma sequência de inteiros positivos, uma inversão é um par de posições em que o elemento da posição mais a esquerda é maior que o elemento da posição mais a direita. Por exemplo, a sequência* $2, 5, 3, 1, 3$ *tem* 5 *inversões: entre a primeira e a quarta posição, entre a segunda e todas as demais para a direita e, finalmente, entre a terceira e a quarta. Qual é o maior número possível de inversões em uma sequência de inteiros positivos cuja a soma de seus elementos é* 2019*?*

Solução:

Primeiramente vamos mostrar que qualquer sequência maximizante do número de inversões precisa ser não-crescente. De fato, se existe um par de números consecutivos a e b, com $a<b$, então a troca de posição desses elementos não altera a soma e aumenta o número de inversões em uma unidade. A seguir, mostraremos que qualquer sequência não-crescente que maximiza o número de inversões deve possuir apenas números iguais a 1 e 2. Suponha, por absurdo, que a sequência contém algum número $k>2$. Troque o último k por um par de elementos: $k-1$ na posição original e 1 na posição final. Claramente essa operação não altera a soma. O 1 final é parte de uma inversão com todo o elemento que era membro de uma inversão com o k original, exceto pelos números 1 a sua direita. O novo $k-1$ é parte de uma inversão com todo elemento que era menor que o k original, incluindo as parcelas 1 a sua direita. Assim, contabilizando a inversão criada entre o novo $k-1$ e o novo 1, essa troca criada aumenta o número de inversões em pelo menos uma unidade. Finalmente, considerando uma sequência qualquer que maximiza o número de inversões e que possui de soma de seus elementos igual a 2019, podemos supor que existem a parcelas iguais a 2 e $2019-2a$ parcelas iguais a 1. O número de inversões é

$$\begin{aligned} a(2019-2a) &= 2019a-2a^2 \\ &= \frac{2019^2}{8}-2\left(a-\frac{2019}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

Para maximizar a expressão anterior, devemos minimizar $|a-2019/4|$ e isso ocorre para $a=505$. Portanto, o maior número de inversões é $505\cdot 1009$.

Problema 12. *A soma dos números positivos* $x_1,x_2,\ldots,x_n$ *é igual a* $\frac{1}{2}$. *Prove que*

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdots\frac{1-x_n}{1+x_n}\geq\frac{1}{3}.$$

Solução:

Provaremos esse resultado por indução. Vejamos.

Se $n=1$, temos $x_1=\frac{1}{2}$ e então $\frac{1-x_1}{1+x_1}=\frac{1/2}{3/2}=\frac{1}{3}$.

Agora, vamos supor que a afirmação é válida para n, e suponhamos que $x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}$ são números positivos para os quais $x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}=\frac{1}{2}$.

Primeiro vejamos o seguinte: se $0<a\leq b$ e $c\geq 0$, então $bc\geq ac$ e $(a+c)b=ab+bc\geq ab+ac=(b+c)a$ e portanto, $\frac{a+c}{b+c}\geq\frac{a}{b}$. Aplicando esse fato aos números $a=1-(x_n+x_{n+1})$, $b=1+(x_n+x_{n+1})$ e $c=x_nx_{n+1}$, segue que

$$\frac{1-(x_n+x_{n+1})+x_nx_{n+1}}{1+(x_n+x_{n+1})+x_nx_{n+1}}\geq\frac{1-(x_n+x_{n+1})}{1+(x_n+x_{n+1})}.$$

Portanto,

$$\frac{1-x_n}{1+x_n}\cdot\frac{1-x_{n+1}}{1+x_{n+1}}\geq\frac{1-(x_n+x_{n+1})}{1+(x_n+x_{n+1})}. \quad (1)$$

Agora, fazendo $y_n=x_n+x_{n+1}$, temos que $x_1,\ldots,x_{n-1},y_n$ são n números positivos cuja soma é igual a $\frac{1}{2}$, e por hipótese de indução vale que,

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdots\frac{1-y_n}{1+y_n}\geq\frac{1}{3},$$

isto é,

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdots\frac{1-(x_n+x_{n+1})}{1+(x_n+x_{n+1})}\geq\frac{1}{3}. \quad (2)$$

Por (1) e (2), segue que,

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdots\frac{1-x_n}{1+x_n}\cdot\frac{1-x_{n+1}}{1+x_{n+1}}\geq\frac{1}{3}$$

e por indução, a afirmação é vale para todo $n\geq 1$, de onde segue o desejado.

Novos Problemas

Problemas Universitários

Problema 13. *Mostre que para qualquer primo* $p>17$, *o número*

$$p^{32}-1$$

é divisivel por 16320.

Problema 14. *Sejam* c *e* x_0 *números reais positivos fixados. Defina a sequência*

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{c}{x_{n-1}}\right),\ \textit{para } n\geq 1.$$

Prove que a sequência converge e que o limite é $\sqrt{c}$.

Problema 15. *Calcule o determinante da matriz quadrada de ordem* n, $A=(a_{ij})_{ij}$, *definida por*

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{|i-j|}, & \textit{se } i\neq j\\ 2, & \textit{se } i=j\end{cases}.$$

Problema 16. *Considere uma esfera de raio unitário centrada na origem de um sistemas de coordenadas* xyz. *Seja* C *um pentágono regular inscrito na esfera e contido no plano* xy. *Determine a área da região contida na esfera cuja projeção com respeito à terceira coordenada coincide com a região delimitada por* C.

Problema 17. *Seja* f *diferenciável em* $x=a$ *com* $f(a)\neq 0$. *Calcule:*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n.$$

Problema 18. *Sejam* $A,B\in M(n,\mathbb{C})$ *e* $P\in\mathbb{C}[X]$ *um polinômio no-constante tal que* $P(0)\neq 0$ *e* $AB=P(A)$. *Prove que a matriz* A *é invertível e que as matrizes* A *e* B *comutam (isto é, que* $AB=BA$*).*

Problemas de Matemática Elementar

Problema 19. *O produto dos números reais positivos* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *é igual a 1. Prove,* ***sem ser por indução****, que*

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geq 2^n.$$

Problema 20. *Seja* A *um subconjunto dos números naturais tal que, entre 100 números naturais consecutivos, existe um elemento de* A. *Prove que podemos encontrar quatro números diferentes* a,b,c *e* d *em* A *tais que* $a+b=c+d$.

Problema 21. *Uma pilha tem 40 pedras. A pilha é dividida em duas partes, depois uma das partes é dividida em duas novamente, etc., até termos 40 pedras separadas (40 pilhas formadas com uma pedra cada). Depois de cada divisão de uma das pilhas em duas menores, escrevemos o produto dos números de pedras nestas duas pilhas em um quadro. Mostre que, no final, a soma de todos os números no quadro será igual a 780.*

Problema 22. *A sequência de números inteiros x_n é definida por $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ e, para $n \geq 3$, x_n é o menor número composto maior que $2x_{n-1} - x_{n-2}$. Encontre o valor de x_{2026}.*

Problema 23. *Em uma festa, existem 25 membros que satisfazem a seguinte condição: quando dois deles não se conhecem, então eles possuem algum amigo em comum. Sabemos que ninguém conhece todos na festa. Prove que a soma dos números de amigos de cada pessoa na festa é pelo menos 72.*

Problema 24. *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível e $P = BD \cap AC$. Os pés das perpendiculares de P aos lados AB e CD são X e Y. Se M e N são os pontos médios dos lados BC e AD, prove que $MN \perp XY$.*

Problema 25. *Uma máquina tem dois botões: um deles dobra um número inteiro e o outro aumenta ele em 1 unidade. Por exemplo, apertando os botões dessa máquina é possível realizar as seguintes operações:*

$$1 \rightarrow_{+1} 2 \rightarrow_{\times 2} 4 \rightarrow_{+1} 5.$$

Se no início você começa com o número 0, qual o número mínimo de vezes que você precisa apertar botões dessa máquina para obter:

a) 100*?*

b) 2024*?*