

Revista de Matemática



Hipátia

Julho de 2025

Volume 3, Número 1



O Farol de Alexandria

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Reitor: Paulo César Miguez de Oliveira

Pró-Reitoria de Extensão Universitária

Pró-Reitor: Guilherme Bertissolo

Instituto de Matemática e Estatística

Diretor: Kleyber Mota da Cunha

Departamento de Matemática

Chefe: Darllan Conceição Pinto

Revista de Matemática
Hipátia

Conselho Editorial

André Mandolesi

Cristina Lizana

Elaís Cidely S. Malheiro

Henrique da Costa

Márcia Barbosa

Nicola Sambonet

Roberto Sant'Anna

Samuel Feitosa

Equipe Técnica

Álison Conceição

Cleber Brito Figueiredo

Eldon Barros dos Reis Júnior

João Vítor Fonseca

José Valdomiro da Silva Neto

Taíse Lara de Souza Jorge

Yure Carneiro

Editor Responsável: Vinícius Mello

Endereço para Correspondência

Instituto de Matemática e Estatística

Av. Milton Santos, s/n, Campus Universitário de Ondina CEP: 40.170-110

hipatia@ufba.br



ISSN 3085-6256



SINOPSE

EPÍSTOLA	
Realizações	1
HISTÓRIA	
O Farol de Euclides	3
BIOGRAFIA	
Elinalva Vergasta	
Afeto, Matemática e Arte	17
TEOREMA	
A Hipótese Generalizada do Contínuo	
Implica o Axioma da Escolha	28
MEMÓRIA	
A Matemática na Minha Vida	
José Fernandes	40
PROBLEMA	
Contando Inversões	
e Outros Problemas	47



EPÍSTOLA

Realizações

Caro Leitor,

É com grande satisfação que compartilhamos os avanços recentes na consolidação da Revista de Matemática Hipátia desde nossa última edição. Obtivemos o código ISSN junto ao Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT), criamos uma conta no repositório Zenodo para registro de Identificadores de Objeto Digital (DOI), garantindo *links* permanentes para nossos artigos, e fomos incluídos no diretório do *Latindex*, sistema de indexação de periódicos voltado para a América Latina, Caribe, Portugal e Espanha, sediado na Universidade Nacional Autônoma do México (UNAM).

Essas conquistas ampliam o alcance da revista e permitem que nossos artigos sejam reconhecidos como publicações acadêmicas em diversos contextos, como progressões funcionais, exames de qualificação e avaliações de órgãos de fomento. Com isso, reforçamos nossa responsabilidade de oferecer conteúdo de excelência aos nossos leitores.

Nesta edição, apresentamos uma rica diversidade de temas. Na seção HISTÓRIA, abordo brevemente a relevância dos *Elementos* de Euclides, comparando-o a um farol — como o Farol de Alexandria, que ilustra nossa CAPA — por sua luz orientadora na matemática. A seção seguinte, intitulada BIOGRAFIA, merece uma explicação especial. Ao saber que o professor Dionicalros preparava um livro sobre sua esposa, a estimada professora Elinalva, decidimos incluir um excerto dessa obra, com a colaboração da professora Elaís Cidely, uma de nossas editoras. A profusão de depoimentos elogiosos e merecidos à professora Elinalva — aos quais me junto com meus próprios elogios — pode dar uma ideia, mesmo para aqueles que não a conheceram, da alegria e do entusiasmo que marcaram sua trajetória.

Merecem destaque também os professores Samuel e Diego, que, na seção TEOREMA, conduzem um brilhante *tour de force* em lógica matemática, demonstrando a conexão entre duas proposições aparentemente distintas: a Hipótese Generalizada do Contínuo e o Axioma da Escolha.

Pela primeira vez, introduzimos a seção MEMÓRIA, alinhada ao objetivo da Revista de Matemática Hipátia de preservar a história do Departamento de Matemática da UFBA e da matemática na Bahia e no Brasil. Nela, o professor José Fernandes compartilha um depoimento pessoal, oferecendo um valioso relato de sua trajetória na matemática. Encerramos, como de costume, com a seção PROBLEMA, convidando os leitores a novos desafios.

Salvador, 13 de julho de 2025.

O Editor

HISTÓRIA

O Farol de Euclides

Vinícius Mello

Introdução

No início do ano de 2024, fui convidado a proferir a primeira palestra do ano do Seminário Café Cultural, evento tradicional do Departamento de Matemática da UFBA. Como estava, naquele momento, revisando material para a disciplina “Geometria Euclidiana Plana” que lecionaria no primeiro semestre (creio que pela décima vez, mas sem nunca ter ficado plenamente satisfeito, devo confessar), pensei inicialmente em discorrer sobre um tópico qualquer de Geometria Euclidiana.

Mas a pesquisa que estava fazendo para atualizar meu material de ensino me fez descobrir tantos artigos recentes que ou versavam especificamente sobre *Os Elementos*, obra máxima de Euclides de Alexandria, ou que ao menos se referiam a ela sempre nos termos mais elevados, ainda que tratassem de temas atualíssimos, como Inteligência Artificial ou Demonstração Automática de Teoremas, que tive um lampejo: embora o Farol de Alexandria, maravilha da antiguidade construída na mesma época em que *Os Elementos* foi escrito, tenha já se apagado há muito tempo, o “Farol de Euclides”, ou seja, *Os Elementos*, nunca deixou de nos iluminar nesses mais de dois mil e trezentos anos!

Foi esse o mote usado para organizar minha palestra. Na oportunidade, posso dizer que obtive sucesso no Seminário, embora tenha sido superficial em alguns momentos, devido ao tempo curto. Aproveito esta oportunidade, aqui na REVISTA DE MATEMÁTICA HIPÁTIA, para transformar aquela palestra em um artigo de divulgação, mantendo a mesma estru-

tura, mas me aprofundando um pouco mais em alguns pontos. Após uma breve exposição do contexto histórico no qual Euclides viveu e do conteúdo dos *Elementos*, discutiremos o que realmente Euclides estava tentando fazer, sempre atentos ao perigo do anacronismo, e depois passearemos por vários momentos nos quais a luz do Farol de Euclides se projetou na história da Matemática.

O Nome

O título “Elementos” (*Stoicheía*, em grego) carrega uma profundidade conceitual que transcende sua aparente simplicidade, evocando uma reflexão sobre os fundamentos do conhecimento geométrico. A etimologia da palavra grega *stoicheion* (elemento) revela uma multiplicidade de significados que enriquecem a interpretação do tema. Segundo De Simone [5], *stoicheion* pode se referir a uma letra do alfabeto, representando os componentes básicos da escrita, a uma forma geométrica simples ou, ainda, aos elementos físicos clássicos — terra, ar, fogo e água — conforme a tradição filosófica grega.

Essa escolha lexical sugere que “Elementos” não apenas designa os blocos de construção fundamentais da geometria, mas também posiciona a obra como uma espécie de “marco zero” do pensamento geométrico. A interpretação de “Elementos” como um “ABC da geometria” também é possível, indicando que os conceitos apresentados são essenciais e fundacionais, análogos aos rudimentos de qualquer sistema estruturado de conhecimento. Por outro lado, existe a possibilidade de uma ironia sutil embutida

no título, pois *Os Elementos* é uma obra incrivelmente sofisticada quando considerada em seu todo.

Contexto

O impacto duradouro dos *Elementos* pode ser melhor compreendido ao situar a obra em seu contexto histórico, por volta de 300 a.C., durante o período helenístico. Esse momento sucede as conquistas de Alexandre, o Grande, e caracteriza-se por um declínio relativo do poder político grego, contrastado por um florescimento intelectual notável. Nesse cenário, a matemática e a filosofia gregas já haviam sido moldadas por pensadores seminais como Tales de Mileto, Pitágoras, Zenão de Eleia — cujos paradoxos desafiaram concepções sobre o infinito e o movimento —, Demócrito, Platão e Aristóteles. A emergência de Euclides nesse período consolida um legado de rigor lógico e sistematização do conhecimento geométrico.

O período helenístico foi marcado por avanços significativos em matemática e física, com figuras como Arquimedes e Apolônio contribuindo para o desenvolvimento de conceitos que permanecem fundamentais. A longevidade dos *Elementos*, cuja relevância persiste após mais de 2.300 anos, evidencia sua importância como um marco na história do pensamento matemático. A obra não apenas codificou o conhecimento geométrico de sua época, mas também estabeleceu um modelo de rigor dedutivo que influenciou disciplinas científicas por séculos.

Euclides, figura central dessa narrativa, é conhecido principalmente por sua associação com Alexandria, no Egito, um dos maiores centros culturais do mundo antigo. Fundada por Alexandre e governada pela dinastia ptolomaica, Alexandria era um polo cosmopolita, caracterizado por sua diversidade cultural e por um traçado urbano planejado, com ruas dispostas em um sistema de grade que refletia princípios geométricos (Fig. 1). No coração dessa cidade, o Museu — ou Templo das Musas — funcionava como uma instituição de pesquisa, análoga a uma universidade moderna, reunindo intelectuais de diversas áreas. É nesse ambiente vibrante de intercâmbio acadêmico que Euclides provavelmente desenvolveu seu trabalho, beneficiando-se da colaboração com outras mentes brilhantes.

Embora detalhes biográficos sobre Euclides sejam escassos, sua conexão com o Museu de Alexandria reforça a imagem de um erudito imerso em um centro de aprendizado dinâmico. O contraste entre a durabilidade das ideias contidas nos *Elementos* e a efemeridade de construções físicas, como o Farol de Alexan-



Figura 1: Mapa da antiga Alexandria (imagem extraída do atlas escolar de F. W. Putzgers)

dria, do qual não sobram nem ruínas, apesar de ter resistido por séculos, já sublinha o impacto perene da obra. Enquanto monumentos materiais desapareceram, o sistema lógico e dedutivo dos *Elementos* continua a iluminar o estudo da matemática, atestando a força das ideias no transcorrer do tempo.

Recepção

A recepção inicial dos *Elementos* no contexto da matemática grega antiga não foi marcada por uma aclamação universal imediata, mas por um processo gradual de reconhecimento de sua importância. Evidências históricas sugerem que a obra de Euclides, embora seminal, enfrentou críticas e debates em seus primeiros séculos. Um dos primeiros registros de interação com *Os Elementos* vem de Apolônio, um matemático que viveu pouco após Euclides. Nesta citação, tirada da obra *Cônicas* (185 a.C.), Apolônio parece ter questionado aspectos do tratamento dado por Euclides a certos lugares geométricos em um trabalho infelizmente perdido:

E quando os descobrimos, percebemos que Euclides não havia feito a síntese do lugar geométrico em três e quatro linhas, mas apenas um fragmento acidental dele, e mesmo isso não foi feito com felicidade. [6]

Essa crítica inicial indica que *Os Elementos* não foi imediatamente aceito como uma obra-prima incontestável, mas sim submetido ao escrutínio acadêmico típico do período helenístico.

Outra menção a Euclides, dessa vez mais elogiosa, aparece no diálogo *De Oratore* de Cícero, escrito em

meados do primeiro século a.C. Numa crítica ao excesso de especialização nas artes e ciências, um dos interlocutores indaga:

(...) Você supõe que a geometria sob Euclides e Arquimedes, a música sob Damão e Aristóxeno, a própria gramática quando Aristófanes e Calímaco trataram dela, eram tão divididas em partes que ninguém compreendia o sistema universal de nenhuma dessas ciências, mas diferentes pessoas selecionavam diferentes partes nas quais pretendiam dedicar seu trabalho? (Cic. de Orat. 3.132)

Posteriormente, por volta de 320 d.C., Papo de Alexandria emerge como um defensor de Euclides, respondendo às críticas de Apolônio e reforçando a relevância da obra:

Ele (Euclides) era extremamente justo e gentil com todos que eram capazes de ajudar a acrescentar algo à matemática... e nada ofensivo, um homem exato, mas não um fanfarrão — como esse sujeito (Apolônio). [6]

Esse diálogo acadêmico, separado por séculos, reflete a continuidade do debate intelectual em torno dos *Elementos* e sua consolidação como referência fundamental. Contudo, o comentário mais significativo sobre a obra na antiguidade vem de Proclo, por volta de 450 d.C., aproximadamente sete séculos após a composição dos *Elementos*. O comentário de Proclo, focado especialmente no Livro I, tornou-se um texto influente para as gerações posteriores, moldando a compreensão da obra de Euclides.¹

Proclo oferece uma perspectiva amplamente aceita na antiguidade:

Euclides, que não era muito mais jovem que Hermótimo e Filipo, compôs *Elementos*, ordenando muitos dos teoremas de Eudoxo, aperfeiçoando muitos dos que haviam sido trabalhados por Teeteto e fornecendo provas rigorosas de proposições que haviam sido demonstradas com menos rigor por seus antecessores. [6]

Assim, Euclides não teria criado *ex nihilo* os teoremas apresentados nos *Elementos*, mas agido como

¹Acidentalmente, destacam-se os desafios de preservar e interpretar um *corpus* matemático complexo em uma era com recursos limitados para transmissão de conhecimento, comparável à dificuldade de interpretar hoje uma obra do século XIV com base em fragmentos e comentários tardios.

um compilador e organizador do conhecimento matemático de seus predecessores, como Eudoxo e Teeteto, por exemplo. A inovação central de Euclides, conforme enfatizado por Proclo, reside na sistematização do conhecimento e na apresentação de provas rigorosas dentro de uma estrutura dedutiva coerente, ou seja, no método.

Organização

Os *Elementos* constitui-se de uma coleção abrangente de fatos matemáticos, na maior parte geométricos ou descritos em termos geométricos, organizados em uma estrutura *dedutiva* na qual fatos mais complexos são *demonstrados* (explicados, justificados) através de fatos mais simples. Diferentemente das tradições da Babilônia e do Egito, que se concentravam em procedimentos práticos para resolver problemas específicos, como cálculos de áreas e volumes, a estrutura dos *Elementos* prioriza a demonstração de *proposições* (os fatos matemáticos) a partir de *definições*, *postulados*, *noções comuns*, que são os pontos de partida da investigação, e de outras proposições previamente demonstradas.

A obra abrange uma ampla gama de fatos, desde fundamentos geométricos até teoria dos números e geometria espacial, e está dividida em treze² *Livros*:

Livro I: Estabelece os fundamentos da geometria plana, abordando construções básicas, propriedades de triângulos, linhas paralelas e culminando na prova geométrica do Teorema de Pitágoras.

Livro II: Explora a chamada “álgebra geométrica”, utilizando figuras como quadrados e retângulos para demonstrar identidades algébricas, como as envolvendo o quadrado da soma e a diferença de quadrados, embora o termo “álgebra geométrica” seja debatido entre historiadores. Este livro também introduz a razão áurea.

Livro III: Focado em círculos, aborda propriedades de cordas, tangentes e ângulos inscritos, consolidando a compreensão geométrica de figuras circulares.

Livro IV: Trata da inscrição e circunscrição de polígonos regulares (como triângulos equiláteros, quadrados, pentágonos e hexágonos) em círculos, utilizando apenas régua e compasso, reforçando técnicas de construção geométrica.

²Dois livros adicionais sobre geometria espacial, considerados apócrifos, aparecem em manuscritos antigos.

Livro V: Apresenta a teoria da proporção de Eudoxo, uma conquista teórica notável que oferece um método rigoroso para lidar com grandezas incommensuráveis, como a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado ($\sqrt{2}$). Especula-se que essa teoria tenha surgido para resolver a chamada “crise dos irracionais” (embora seja discutível se essa “crise” realmente existiu), permitindo comparações de proporções sem atribuir valores numéricos.

Livro VI: Aplica a teoria da proporção à similaridade de figuras, incluindo triângulos e polígonos, e reformula o Teorema de Pitágoras em termos de figuras semelhantes em triângulos retângulos.

Livros VII, VIII e IX: Deslocam o foco para a teoria dos números, tratada geometricamente, com números representados como segmentos de reta. O Livro VII introduz conceitos como divisibilidade, números primos e o algoritmo euclidiano para encontrar o máximo divisor comum. O Livro VIII explora progressões geométricas, enquanto o Livro IX inclui resultados fundamentais, como a prova da infinitude dos números primos e a construção de números perfeitos pares (iguais à soma de seus divisores próprios, como 6 e 28), vinculados aos primos de Mersenne.

Livro X: Considerado altamente complexo, classifica diferentes tipos de grandezas incommensuráveis, como retas irracionais relacionadas a raízes quadradas, demonstrando a profundidade técnica da obra.

Livros XI e XII: Passam à geometria sólida, abordando linhas, planos, ângulos sólidos, paralelepípedos (Livro XI) e o cálculo de volumes de pirâmides, cones e esferas por meio do “método da exaustão”, um precursor do cálculo integral (Livro XII).

Livro XIII: Concentra-se na construção dos cinco sólidos platônicos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro). A escolha de concluir a obra com esses poliedros regulares, associados na filosofia platônica aos elementos fundamentais do cosmos, sugere possíveis influências platônicas na estrutura dos *Elementos*, embora isso permaneça objeto de especulação acadêmica.

No início de cada livro, são elencadas definições de termos que serão usados nas demonstrações subse-

quentes. Algumas das definições encontradas no Livro I são, por exemplo:

Def.1 Um *ponto* é aquilo que não possui partes.

Def.2 Uma *linha* é comprimento sem largura.

Def.3 As *extremidades* da linha são pontos.

Def.4 *Linha reta* é aquela que está posta igualmente entre suas extremidades.

Def.10 Quando uma linha reta elevada sobre uma linha reta torna os ângulos adjacentes iguais entre si, cada um dos ângulos iguais é *reto*, e a linha reta sobre o outro é chamada *perpendicular* àquela em que está.

Def.15 Um *círculo* é uma figura plana contida por uma linha tal que todas as linhas retas que caem sobre ele a partir de um ponto entre aqueles que estão dentro da figura são iguais entre si.

Além disso, no Livro I são elencados cinco *postulados*:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado do qual estão os menores do que dois retos.

e cinco *noções comuns*:

1. Coisas iguais a uma coisa são iguais entre si.
2. Se a coisas iguais foram somadas coisas iguais, as somas também serão iguais.
3. Se de coisas iguais forem subtraídas coisas iguais, os restos também serão iguais.
4. Coisas que coincidem entre si são iguais.
5. O todo é maior que suas partes.

Postulados e noções comuns são normalmente interpretados como fatos tão intuitivos que não precisam de demonstração e que baseiam, portanto, toda investigação subsequente. Mais adiante, outra interpretação será aventada. Os postulados tratam de fatos puramente geométricos, enquanto as noções comuns estão relacionadas a fatos gerais que se aplicam possivelmente a outras ciências.

Estrutura de uma Demonstração

A análise da estrutura das provas nos *Elementos*, conforme delineada por Proclo no século V d.C., oferece uma visão detalhada da abordagem metodológica de Euclides. Proclo identificou seis componentes distintos em uma proposição típica da obra, refletindo a organização lógica e sistemática que caracteriza o texto. Esses componentes são (com os nomes correspondentes em grego entre parêntesis):

Enunciação (*protasis*): A declaração inicial do que será provado ou construído, apresentando a proposição de forma geral.

Exposição (*ekthesis*): A definição de um *diagrama* específico, com a atribuição de rótulos aos elementos relevantes, como pontos e linhas.

Determinação (*diorismos*): A reafirmação do objetivo da proposição, agora em termos da figura específica introduzida na exposição.

Construção (*kataskheue*): A adição de novos elementos geométricos, como pontos, linhas ou círculos, necessários para desenvolver a prova.

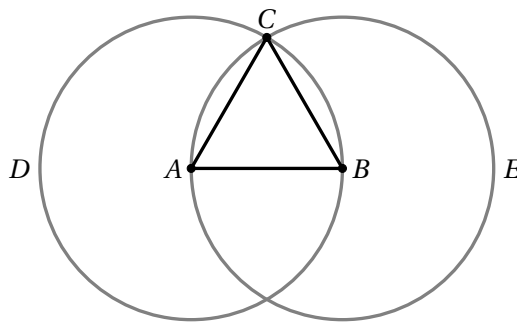
Demonstração (*apodeixis*): A descrição passo a passo do argumento que estabelece a veracidade da proposição, referindo-se a definições, postulados, noções comuns e resultados anteriores.

Conclusão (*sumperasma*): A reafirmação da proposição original como provada, encerrando a demonstração.

Essa estrutura é exemplificada na primeira proposição do Livro I, que propõe a construção de um triângulo equilátero a partir de um segmento de reta dado:

Enunciação Sobre uma linha reta finita, construir um triângulo equilátero.

Exposição Seja AB a linha reta finita dada.



Determinação Assim, deve-se construir um triângulo equilátero sobre AB .

Construção Com o centro A e com distância AB se descreva (Post. 3) o círculo BCD ; e com o centro B e com distância BA se descreva o círculo ACE . Do ponto C , onde os círculos se cortam reciprocamente, se tracem (Post. 1) para os pontos A e B as retas CA e CB .

Demonstração Sendo o ponto A o centro do círculo BCD , AC é igual a AB (Def. 15). E sendo o ponto B o centro do círculo CAE , BC é igual a BA . Mas foi provado que CA é igual a AB . Logo tanto CA como CB são iguais a AB . Mas as coisas que são iguais a uma terceira são iguais entre si (Noção Comum 1). Logo CA é igual a CB . Logo as três retas CA , AB e BC são iguais.

Conclusão Por consequência, o triângulo ABC , construído sobre a linha reta finita dada AB , é equilátero.

Esse mesmo esquema é seguido, com poucas exceções, ao longo dos treze livros. Euclides distingue dois tipos de proposições: *problemas*, que têm o objetivo de demonstrar a possibilidade de construir certos objetos, como o triângulo equilátero no caso acima, e *teoremas*, que visam estabelecer certos fatos, como por exemplo a Proposição I.47 (o Teorema de Pitágoras). A estrutura da demonstração é a mesma em ambos os casos, mas há pequenas variações de linguagem. Por exemplo, emprega-se o modo imperativo³ para na enunciação de problemas (“Construa um triângulo...” ou “Construir um triângulo...”) e o modo indicativo nos teoremas (“Em triângulos retângulos, o quadrado do lado que subtende o ângulo reto é igual aos quadrados dos lados que contêm o ângulo reto”). Também os problemas terminam com a expressão “o que era preciso fazer” (*quod erat faciendum*, em latim, abreviado por QEF), enquanto os teoremas se encerram com “o que era preciso mostrar” (*quod erat demonstrandum*, abreviado por QED).

³em grego, normalmente traduzido para o infinitivo em português.

Há uma extensa literatura sobre as origens, motivações e propósitos de tal estrutura demonstrativa, com visões por vezes contraditórias. Algumas pontos, entretanto, parecem certos:

- A redundância das hipóteses e teses e o uso de uma linguagem formulaica, repetitiva, facilita a memorização das proposições.
- O diagrama que aparece na exposição tem uma função essencial, sendo uma característica inconfundível dos *Elementos*, mesmo que a necessidade de figuras para a demonstração de fatos gerais tenha sido questionada desde a antiguidade, pois elas representam apenas casos particulares das proposições e ainda são desenhadas de maneira necessariamente imperfeita.
- A etapa de construção isola o aspecto criativo do argumento, na medida em que introduz novos objetos que serão utilizados decisivamente na etapa de demonstração.

Anacronismo

A interpretação dos *Elementos* pode ser obscurecida pelo *anacronismo*, isto é, pela tendência de julgá-los com base nos padrões modernos de lógica matemática e sistemas axiomáticos, desenvolvidos principalmente nos séculos XIX e XX ⁴. Sob essa perspectiva contemporânea, *Os Elementos* apresenta aparentes lacunas e imperfeições. Por exemplo, as definições de Euclides, como a de um ponto como “aquilo que não tem parte” ou de uma reta como “comprimento sem largura”, carecem do rigor exigido em sistemas formais modernos, nos quais tais termos são frequentemente tratados como conceitos primitivos indefinidos. Além disso, análises contemporâneas revelam que Euclides ocasionalmente se apoia em suposições implícitas não declaradas em seus postulados ou noções comuns, muitas vezes tiradas das figuras, como propriedades de continuidade ou a ordem de pontos em uma reta. Por exemplo, o que garante que os dois círculos traçados na proposição detalhada na seção anterior de fato se intersectam?

Essa crítica, no entanto, levanta uma questão fundamental: *estaria Euclides sendo descuidado pelos padrões modernos, ou estaria ele operando dentro de um paradigma intelectual distinto?*

Uma interpretação alternativa, proposta pelo estudioso húngaro Árpád Szabó em [14], sugere que *Os*

Elementos tem raízes menos na lógica formal aristotélica, ainda em desenvolvimento na época, e mais na tradição grega da *dialética*, caracterizada pela argumentação estruturada entre perspectivas opostas, como no método socrático. Szabó argumenta que a terminologia de Euclides reflete essa abordagem. Por exemplo, a palavra grega *hypóthesis* (hipótese), usada por Euclides, não denotaria apenas uma suposição lógica, mas uma proposição consensual estabelecida como ponto de partida para um debate:

A palavra grega *hipótese* deriva da preposição *hypo* (sob, abaixo de) e do verbo *tithesthai* (por, colocar) e significa, de fato, aquilo que duas pessoas engajadas em uma conversa, dois adversários em um debate, mutuamente concordam como base e ponto de partida de seu debate. (...) O primeiro tipo de hipótese são as *definições*, as quais para os gregos eram circunscrições, dadas sem prova, de conceitos (noções) usadas em matemática. [14]

Assim, definições como a de ponto ou reta não visariam ao rigor lógico absoluto, mas sim delimitar os termos da discussão, estabelecendo um acordo sobre os conceitos fundamentais a serem explorados.

Na sequência, Szabó indaga:

Mas o que acontece se os disputantes não podem encontrar asserções mutuamente aceitáveis de onde começar? (...) Neste caso, não há base mútua aceitável para a discussão subsequente; e um dos adversários não pode começar de uma ‘hipótese’ mas apenas de uma asserção mais forte tomada como ponto de partida *por ele* — de um ‘*axioma*’. A palavra grega ‘axioma’ originalmente significando ‘petição’ (pedido, requerimento, exigência); um adversário requer que o outro aceite sua asserção como ponto de partida do debate.

A palavra grega para postulado é *aitemata*, significando literalmente ‘demanda’, ‘pedido’, sendo portanto quase um sinônimo de ‘axioma’. Mas se postulados são asserções mais fortes que um adversário demanda do outro, *o que haveria de tão forte assim nos postulados de Euclides? Não é intuitivamente óbvio que seja possível traçar uma linha reta entre dois pontos ou um círculo com centro e raio dados?*

Para Zenão de Eleia e outros filósofos da escola eleática, os quais questionavam a coerência de conceitos como movimento e divisibilidade através de

⁴O prof. Papini deu sua visão sobre este desenvolvimento na edição anterior desta revista [11] (N. do E.).

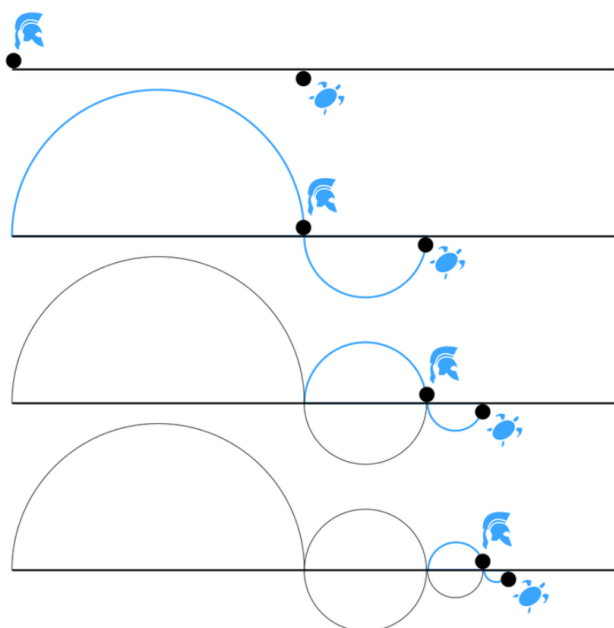


Figura 2: Para alcançar a tartaruga, Aquiles precisa primeiro chegar ao ponto onde a tartaruga estava. No entanto, nesse ponto, a tartaruga já avançou para uma nova posição. Para alcançar essa nova posição, Aquiles precisa cobrir mais uma distância, e assim por diante, de modo que ele nunca ultrapassará a tartaruga. (Fonte: Wikipedia)

vários paradoxos engenhosos, como o paradoxo de “Aquiles e a Tartaruga” (Fig. 2), a resposta poderia ser: “Não, não é óbvio, e mesmo que o fosse, tratando a matemática de verdades eternas, demonstrações não deveriam invocar a ideia de movimento”.

Assim, os três primeiros postulados seriam exigências para aceitar a possibilidade de construções geométricas fundamentais, utilizando ferramentas como régua e compasso:

A única maneira de tornar as construções geométricas teoricamente possíveis é admitindo ao menos três tipos de movimentos que são indispensáveis para a produção das formas geométricas mais simples (linhas retas, círculos e seus pontos de interseção).(...) Eles são realmente *demandas* (*aitemata*, postulados) e não *acordos* (*homologemata*), pois eles postulam movimento [que é inaceitável para os Eleatas].[15]

Em resumo, os postulados funcionam como condições para viabilizar o discurso geométrico, e não como verdades intuitivamente óbvias.

As noções comuns (*koinai ennoiai*), por sua vez, abordam princípios gerais de igualdade e magnitude, que também poderiam ser questionadas no contexto filosófico da época:

Ao contrário, todas as propriedades afirmadas da relação [de igualdade] deveriam ser vistas (ao menos para os Eleatas) como autocontraditórias. Não é nada evidente como duas coisas distintas (i.e. coisas que não são as mesmas) podem jamais ser ‘iguais uma a outra’.(...) Os Eleatas estavam dispostos a conceder apenas que uma coisa possa ser *igual a si mesma*, não que ela pudesse igualar *outra coisa*. [15]

Ou seja, filósofos eleáticos poderiam questionar a igualdade de entidades distintas ou a relação entre o todo e suas partes, especialmente considerando paradoxos envolvendo o infinito. Na matemática moderna, por exemplo, conjuntos infinitos desafiam a noção de que o todo é maior que a parte, como demonstrado pela correspondência biunívoca entre um conjunto infinito e certos subconjuntos próprios. Assim, as noções comuns de Euclides seriam demandas baseadas na experiência comum com grandezas finitas, aceitas para permitir o discurso matemático.

Mais recentemente, e numa direção semelhante, Novaes afirma em *The Dialogical Roots of Deduction* (“As Raízes Dialógicas da Dedução”) [10] que

Podemos assim dizer que a demonstração [em Euclides] representa um ‘diálogo’ entre o autor do texto e seus leitores, os quais são instruídos a levar a cabo certos procedimentos.

Ou seja, à medida que Euclides, o “provador” interessado em demonstrar uma proposição, vai descrevendo as etapas da construção e da demonstração, e o leitor, talvez até inicialmente “cético”, as vai reconstruindo mentalmente (ou mesmo fisicamente com régua e compasso), com a ajuda do diagrama, estabelece-se um diálogo ativo, bem ao estilo grego, produzindo um efeito persuasivo bem maior do que a mera leitura de um argumento puramente textual. Nesse processo dialógico, a existência do ponto de interseção entre os círculos traçados na Proposição 1, por exemplo, fica evidente, não sendo um problema de fato.

As objeções quanto ao uso de figuras em demonstrações também foram desafiadas através de uma análise detalhada do filósofo Kenneth Manders em “The Euclidean Diagram” (O Diagrama Euclidiano)

[7]. Resumindo um longo argumento, Manders inicialmente lembra que, embora conclusões errôneas possam ser retiradas de figuras, isso muito raramente foi um problema na prática de dois mil anos de geometria euclidiana, o que sugere um uso *controlado* das figuras. A seguir, ele faz uma distinção entre propriedades que ele denominou *co-exatas*, tais como incidência entre retas e ordem entre pontos em uma reta, que não variam caso os dados da figura sejam ligeiramente perturbados, e as propriedades *exatas*, como medidas de segmentos e perpendicularidade, que variam. Como bem resume Santos de Jesus [13],

O principal erro nas objeções às demonstrações euclidianas foi assumir que qualquer afirmação era justificada pelo diagrama. Euclides não procede assim. Nos *Elementos*, uma propriedade exata nunca é extraída dos diagramas. Já as propriedades topológicas, as *co-exatas*, não dependem da precisão com que os diagramas são desenhados, senão do controle sobre a manipulação da figura, controle este que depende da estabilidade da prática matemática.

Após a crítica de Manders, outros pesquisadores propuseram maneiras de incorporar formalmente diagramas nos esquemas dedutivos [8, 1].

Essas interpretações reconfiguram *Os Elementos* como uma obra menos voltada para a construção de um sistema lógico atemporal e mais focada em estabelecer um argumento estruturado com base em pontos de partida consensuais. Essa perspectiva destaca a natureza contextual da obra, enraizada nas práticas intelectuais de sua época, e oferece uma lente alternativa para compreender sua estrutura e propósito.

Edições

A história das edições dos *Elementos* é muito complexa (como detalhada em [12] e [19]), mas um breve resumo é necessário para se entender o alcance do *Farol de Euclides*. Na Antiguidade Tardia, uma edição comentada por Teon de Alexandria, cuja filha Hipátia dá nome a esta revista, tornou-se amplamente influente. Esse momento coincide com o declínio de Alexandria e a ascensão de Constantinopla (Bizâncio) como centro do mundo helenístico. Um lindo exemplar bizantino de 888 d.C., um livro em pergaminho que pertenceu a Aretas de Patras, é o mais antigo manuscrito grego dos *Elementos* com uma data estampada na capa. Uma tradução do grego para o árabe

foi realizada por al-Hajjaj no século IX. Estudiosos do mundo islâmico não apenas preservaram o texto, mas também o expandiram com novos comentários e interpretações, enriquecendo seu conteúdo. Nos séculos XI e XII, a transmissão dos *Elementos* para a Europa Ocidental foi mediada por tradutores como Adelardo de Bath, que, viajando para regiões como Espanha e Sicília, traduziram versões árabes para o latim. Esse processo reintroduziu a obra no contexto europeu, onde ela se tornaria uma pedra angular do pensamento matemático medieval.

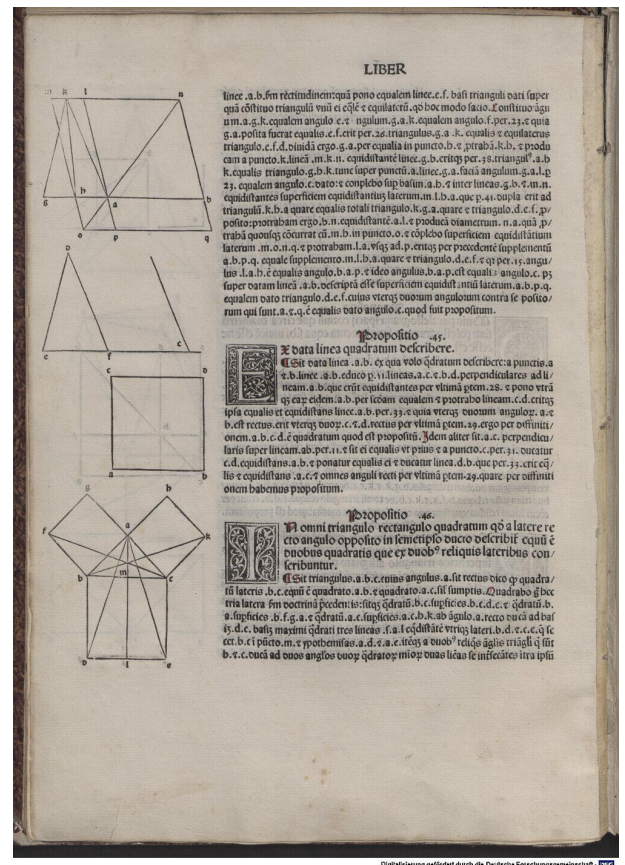


Figura 3: Em 25 de maio de 1482, o impressor Erhard Ratdolt, de Veneza, lançou a primeira edição impressa (*editio princeps*) dos *Elementos* de Euclides — *Praeclarissimus liber elementorum Euclidis in artem geometriae*. O texto de Ratdolt foi baseado em uma tradução do árabe para o latim, presumivelmente feita por Abelardo de Bath no século XII, editada e anotada por Giovanni Compano (Campanus de Novara) no século XIII. A primeira edição impressa de Euclides foi o primeiro livro substancial a conter figuras geométricas, das quais incluía mais de 400. (Fonte: *Bayerische Staatsbibliothek*)

A invenção da imprensa no século XV revolucionou a disseminação dos *Elementos*. A primeira edição impressa, baseada numa manuscrito anterior composto

por Campano de Novara, foi publicada por Ratdolt em Veneza em 1482, tornando a obra significativamente mais acessível (Fig. 3). Seguiram-se inúmeras edições, incluindo versões baseadas em manuscritos gregos redescobertos, como a de Simon Grynaeus de 1533, e traduções influentes em línguas locais, como italiano (Tartaglia, 1543), alemão (Xylander, 1562), francês (Forcadel, 1564), inglês (Billingsley, 1570), espanhol (Zamorano, 1576) e holandeses (Dou, 1606). No final do século XVI, o matemático jesuíta Christopher Clavius produziu uma edição em latim amplamente utilizada, conhecida por seus extensos comentários. No século XVII, a edição de Pierre Hérigone (1634) introduziu símbolos matemáticos modernos, como o símbolo $\perp$ para denotar perpendicularidade, refletindo um esforço para alinhar a obra com as convenções emergentes da matemática. A partir daí, surgiram outras edições apenas inspiradas pelos *Elementos*, mas com axiomas e demonstrações diferentes, como a influente *Éléments de géométrie avec des notes* (1794) de Legendre, cuja tradução para o português foi o primeiro livro de matemática impresso no Brasil (1809).

No começo do século XIX, François Peyrard, trabalhando com todos os manuscritos gregos disponíveis, inclusive o famoso *manuscrito 190* da biblioteca do Vaticano (o qual fora “tomado de empréstimo” pelas tropas napoleônicas durante a invasão da Itália), compôs uma versão dos *Elementos* mais próxima do original, sem os acréscimos feitos desde o tempo de Teon. Posteriormente, por volta de 1880, o filólogo dinamarquês Heiberg continuou o trabalho de Peyrard, produzindo a versão mais aceita atualmente.

Muitas dessas edições buscavam “aperfeiçoar” *Os Elementos*, adicionando-se novos postulados e novas definições, alterando-se a ordem, o número e a redação de algumas proposições, tudo isso com o objetivo de se preencher as “lacunas” lógicas que eram percebidas, uma vez que o contexto cultural e filosófico que engendrou a obra já havia desaparecido. De Risi [12] realizou o trabalho hercúleo de identificar os axiomas usados em cada uma das centenas de edições conhecidas no ocidente num período de quase mil anos, do manuscrito 190 até o começo do século XIX.

É necessário dizer, entretanto, que o entusiasmo gerado por essas edições entre os eruditos não era compartilhado por gerações de estudantes que eram obrigados a estudar geometria *à maneira de Euclides*, decorando enfadonhos teoremas, sem a motivação adequada e privados daqueles elementos de *performance*, diálogo e debate que caracterizavam o mé-

todo grego. O matemático Sylvester chegou a afirmar que

Eu deveria me alegrar em ver (...) Euclides honrosamente arquivado ou enterrado “em lugar fundo, jamais tocado por nenhuma sonda” fora do alcance dos estudantes; [19, p. 286]

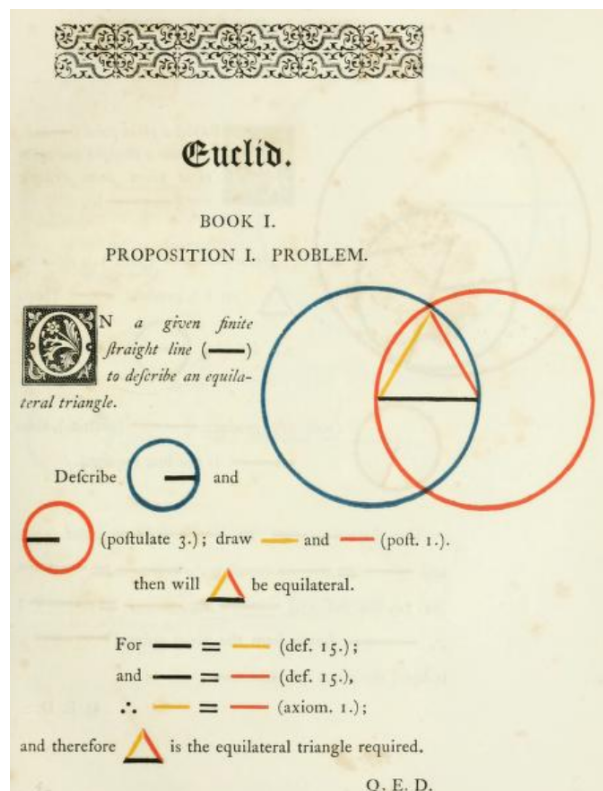


Figura 4: Demonstração da Proposição I.1 na edição de Oliver Byrne. (Fonte: Getty Research Institute)

Talvez a necessidade de tornar o estudo dos *Elementos* menos árido tenha levado Oliver Byrne a editar sua versão em 1847 (Fig. 4), celebrada pela abordagem visual inovadora. Byrne substituiu as tradicionais letras por diagramas e símbolos codificados por cores para representar ângulos e retas nas demonstrações, criando uma obra de grande apelo estético. Embora não tenha alcançado sucesso comercial em sua época, essa edição foi redescoberta recentemente por *designers* e bibliófilos, que a valorizam por sua singularidade visual e valor artístico.

Descartes

Uma transformação significativa no pensamento geométrico ocorreu com a publicação de *La Géométrie* por René Descartes em 1637, que introduziu a *geometria analítica*. Ao utilizar coordenadas e álgebra para

resolver problemas geométricos, Descartes ofereceu uma alternativa poderosa aos métodos sintéticos de Euclides. Embora não tenha substituído imediatamente a abordagem euclidiana, a geometria analítica proporcionou uma nova ferramenta conceitual, expandindo as possibilidades de análise geométrica e marcando uma transição para paradigmas matemáticos modernos. Segundo Thomsen [16],

Enquanto antes de Descartes cada teorema exigia para sua prova alguma ideia nova, algum acaso feliz, como por exemplo o desenho de algumas linhas peculiares na figura, a geometria analítica fornece de uma vez por todas um meio infalível de completar a prova em cada caso em um número finito de etapas, apenas por diligência e rotina.

Não seria exagero ombrear Euclides e Descartes na história da matemática e das ideias em geral, tanto é assim que seus nomes se tornaram adjetivos de uso comum: euclidiano e cartesiano. Mas demorou um tempo para esse reconhecimento. Por exemplo, o filósofo Spinoza, inicialmente influenciado por Descartes, descreveu a filosofia cartesiana usando a mesma estrutura dedutiva euclidiana em seu livro *Renati Descartes principia philosophiae, more geometrico demonstrata* (1663)! Posteriormente, Spinoza empregaria de novo o método euclidiano em sua obra máxima, *A Ética demonstrada à maneira dos geometras* (1677).

Outro exemplo do peso do legado euclidiano é mais uma obra emblemática: *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* (1687), de Isaac Newton. Newton era bem versado tanto na tradição euclidiana, quanto na então recente geometria cartesiana, tendo já desenvolvido seu cálculo na forma analítica de Descartes, porém, ainda assim, talvez para facilitar a divulgação (ou para dificultar, Newton era um sujeito esquivo), ele expôs seu sistema numa linguagem aparentemente euclidiana, na qual o cálculo se ocultava em expressões como “razões finais” de “quantidades evanescentes”.

Hoje em dia, essas duas maneiras de abordar a geometria são vistas pela maioria dos matemáticos como absolutamente complementares. Mas ainda há aqueles que veem uma primazia dos métodos geométricos mais puros, como pode-se notar nesta citação de Michael Atiyah:

Álgebra é a oferta feita pelo diabo ao matemático. O diabo diz: “Eu lhe darei esta máquina poderosa, e ela responderá a qualquer pergunta que você quiser. Tudo o que

você precisa fazer é me dar sua alma: desista da geometria e você terá esta máquina maravilhosa.” ...o perigo para a nossa alma está aí, porque quando você passa para o cálculo algébrico, essencialmente você para de pensar: você para de pensar geometricamente, você para de pensar no significado. [9, p. xvii]

Geometrias Não-Euclidianas

O quinto postulado de Euclides, conhecido como o postulado das paralelas, desempenhou um papel central na história da matemática, desencadeando um dos debates mais profundos e transformadores da disciplina. Durante séculos, matemáticos buscaram demonstrar que esse postulado, que estabelece que, dada uma reta e um ponto fora dela, existe exatamente uma reta paralela à primeira passando por esse ponto, poderia ser derivado dos outros quatro postulados. A percepção de que o quinto postulado parecia menos intuitivo levou a tentativas persistentes de provar sua dependência, sob a suposição de que ele não era verdadeiramente independente. Apesar desses esforços, nenhuma demonstração bem-sucedida foi alcançada.



C.F. Gauss
(1777-1855)

János Bolyai
(1802-1860)

Nikolai Lobachevsky
(1792-1856)



B. Riemann
(1826-1866)



E. Beltrami
(1835-1900)



H. Poincaré
(1854-1912)

Figura 5: Galeria de matemáticos pioneiros na exploração das geometrias não-euclidianas. (Fonte: Wikipedia)

No início do século XIX, uma mudança paradigmática ocorreu quando matemáticos como Carl Friedrich Gauss, János Bolyai e Nikolai Lobachevsky, trabalhando de forma independente, começaram a explorar as implicações de rejeitar o quinto postulado (Fig. 5). Eles desenvolveram geometrias não-euclidianas, nas quais o postulado das paralelas não se aplica, revelando a possibilidade de sistemas geométricos consistentes que descrevem espaços curvos, como os hiperbólicos e elípticos. Posteriormente, no mesmo século, Bernhard Riemann generalizou ainda mais essas ideias, estabelecendo os fundamentos da geometria diferencial. Modelos formais desenvolvidos por Eugenio Beltrami e Henri Poincaré demonstraram que essas geometrias não-euclidianas eram tão logicamente robustas quanto a geometria euclidiana, que descreve o espaço plano. Essa descoberta revolucionou não apenas a matemática, mas também a física, fornecendo ferramentas conceituais essenciais para desenvolvimentos como a teoria da relatividade geral.⁵

Axiomatizações

No final do século XIX e início do século XX, a busca por uma base axiomática rigorosa para a geometria intensificou-se, impulsionada pelo desejo de abordar as lacunas percebidas no sistema de Euclides. Um marco significativo nesse processo foi a publicação de *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria), de David Hilbert, em 1899. Hilbert propôs um sistema axiomático formal que eliminava suposições implícitas presentes nos *Elementos*, como aquelas relacionadas à continuidade e à ordem dos pontos, estabelecendo a geometria em uma estrutura lógica mais robusta. Sua abordagem tornou-se um modelo para a matematização rigorosa, influenciando profundamente o desenvolvimento da matemática moderna.

Outros matemáticos contribuíram com sistemas axiomáticos alternativos, cada um oferecendo perspectivas distintas sobre os fundamentos da geometria. Como disse Zeidler,

Parece que todo geômetra respeitável tem seu próprio sistema de axiomas e jura por eles. Sem um, você não é ninguém! [20]

Por exemplo, Mario Pieri, um colaborador de Giuseppe Peano, elaborou não uma, mas duas axioma-

⁵É bem verdade, entretanto, que o desenvolvimento da *geometria projetiva*, na qual não existem retas paralelas, desde ao menos o século XVII com Desargues e Pascal, até o final século XIX, já prenunciava que a geometria euclidiana não é absoluta.

tizações da geometria euclidiana, uma delas (*Punto e Sfera*, de 1908) baseada apenas nas noções primitivas de ponto e equidistância ⁶. O famoso lógico Alfred Tarski mostrou em 1926, usando uma axiomatização inspirada na de Pieri, que a geometria euclidiana é *consistente e completa*, ou seja, qualquer proposição (formulada na linguagem de primeira ordem) pode ser provada ou refutada, ao contrário do que ocorre na aritmética (como resulta do Teorema da Incompletude de Gödel). Numa direção menos teórica e mais prática, G.D. Birkhoff concebeu em 1932 um sistema de axiomas simples o suficiente para ser usado no ensino escolar. Por fim, como apenas mais um exemplo de uma série infundável, G. Thomsen, dando continuidade à ideia de Felix Klein de unificar as diferentes geometrias recorrendo ao conceito de *grupos de simetrias* (Programa de Erlangen), organizou a geometria plana a partir do grupo das *reflexões* do plano.

O impacto duradouro dos *Elementos* reside em sua capacidade de levantar questões fundamentais que continuam a inspirar avanços na geometria e em outras áreas da matemática. A obra de Euclides não apenas forneceu um modelo inicial de sistematização dedutiva, mas também serviu como um catalisador para debates e inovações que moldaram o desenvolvimento da matemática por mais de dois milênios. Essa ressonância contínua evidencia o poder das ideias de Euclides e sua relevância ininterrupta no discurso matemático.

Desenvolvimentos Recentes

A busca por rigor na validação das provas dos *Elementos* de Euclides ganhou novo impulso com o advento da computação moderna. Um exemplo notável desse esforço é o trabalho *Proof-checking Euclid* [2] no qual um sistema computacional de verificação de demonstrações foi usado para provar formalmente, usando uma variação dos axiomas de Tarski, todas as 48 proposições do Livro I dos *Elementos*. No processo, foram provados 235 teoremas no total, de modo que quase 200 teoremas extras foram necessários para cobrir as lacunas lógicas, o que foi chamado jocosamente de “Livro Zero” dos *Elementos*.

Mais recentemente, em 2024, o Google DeepMind anunciou o desenvolvimento do *AlphaGeometry*[17], um sistema de inteligência artificial capaz de resolver problemas complexos de geometria em nível de Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO). O

⁶Após a palestra, o prof. Thierry Lobão mencionou uma axiomatização semelhante, baseada nas noções primitivas de esfera e inclusão, apresentada por Edward Huntington em 1913.

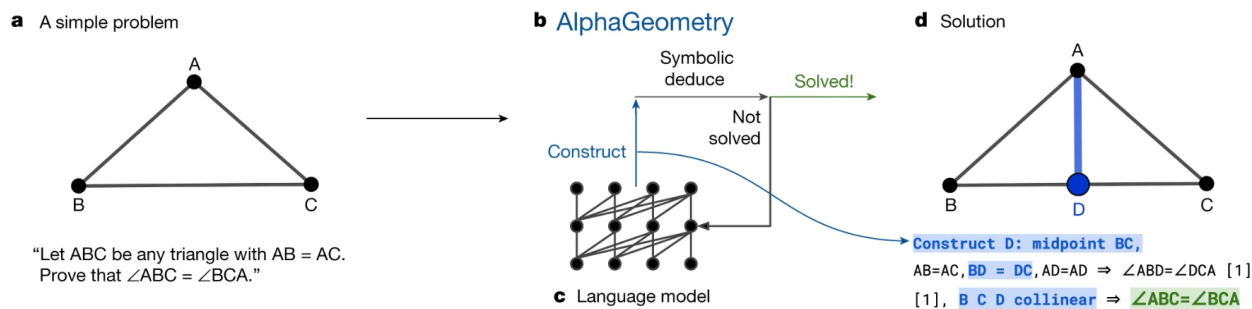


Figura 6: Funcionamento do *AlphaGeometry* (a) Um exemplo simples e seu diagrama. (b) AlphaGeometry inicia a busca de provas executando o mecanismo de dedução simbólica. O mecanismo deduz exaustivamente novas afirmações a partir das premissas do teorema até que o teorema seja provado ou novas afirmações sejam esgotadas. (c) Como o mecanismo simbólico não consegue encontrar uma prova, o modelo de linguagem constrói um ponto auxiliar, aumentando o estado da prova antes que o mecanismo simbólico tente novamente. O *loop* continua até que uma solução seja encontrada. (d) Para este exemplo simples, o *loop* termina após a primeira construção auxiliar “D como o ponto médio de BC”. (Fonte: [17])

AlphaGeometry combina um modelo de linguagem neural, que sugere construções geométricas intuitivas, com um motor simbólico que verifica a consistência lógica das etapas propostas. Em testes realizados com 30 problemas geométricos da IMO (2000–2022), o sistema resolveu 25, superando significativamente sistemas anteriores, como o método de Wu [4], que resolveu apenas 10, e aproximando-se do desempenho médio de medalhistas de ouro humanos (25,9 problemas).

A abordagem do *AlphaGeometry* ecoa, em espírito, os métodos construtivos de Euclides, particularmente na utilização de construções auxiliares, como adicionar pontos ou linhas para facilitar a resolução de problemas geométricos. Assim como Euclides empregava régua e compasso para construir figuras que sustentassem suas provas, o *AlphaGeometry* gera construções geométricas auxiliares, validadas por um motor simbólico que opera com regras lógicas formais. Esse processo híbrido, combinando intuição neural e rigor simbólico, representa uma ponte entre a tradição geométrica euclidiana e as capacidades computacionais modernas (Fig. 6).

Outra conquista recente possibilitada pelos computadores são os programas de *geometria dinâmica*, como o GeoGebra, por exemplo, os quais permitem que as construções geométricas sejam modificadas interativamente. Ficam aqui algumas indagações (um tanto anacrônicas, talvez): Como Euclides, Arquimedes e Apolônio reagiriam a tais ferramentas? Será que Sylvester teria uma melhor apreciação de Euclides se tivesse experimentado o GeoGebra em sala de aula? Quantas cores Byrne usaria em suas construções?

Historiografia

Como discutido anteriormente, a análise da história da matemática, enfrenta o desafio recorrente do anacronismo, que consiste em interpretar obras do passado à luz de padrões e conceitos modernos. Pior do que isso, em muitos momentos, a história da matemática foi escrita, sobretudo por matemáticos, numa perspectiva *presentista* e *paternalista*, ou seja, como se o historiador do presente, no cume do progresso inevitável da matemática, observasse os antepassados tateando num labirinto de ideias turvas que só ele agora pode compreender na totalidade.

Em um artigo incendiário, publicado em 1975, o historiador Sabetai Unguru criticou abertamente essa perspectiva, argumentando que cada evento da história da matemática deve ser compreendido em seus próprios termos, respeitando o contexto filosófico, cultural e metodológico de sua época:

É verdadeiramente deplorável e triste quando um estudante da cultura e das ideias antigas ou medievais deve familiarizar-se primeiro com as noções e operações da matemática moderna, a fim de compreender o significado e a intenção dos comentaristas modernos que lidam com textos matemáticos antigos e medievais.[18]

Esse artigo provocou uma grande polêmica, da qual, pode-se dizer, Unguru saiu vitorioso, pois desde então iniciou-se uma tendência da história da matemática ser contada por historiadores profissionais, e não mais por matemáticos tornados historiadores.

Mais recentemente, o debate historiográfico tem buscado um equilíbrio. Em outro artigo igualmente inflamado, publicado em 2014, Viktor Blåsjö, questiona esse novo *status quo*:

Esta “ortodoxia aceita” molda o nosso campo e, no entanto, raramente ou nunca é submetida a uma análise crítica. Na minha opinião, a autoimagem dos historiógrafos modernos está muito inflada. Neste artigo pretendo mostrar que muitos dos argumentos a favor da suposta superioridade da historiografia moderna acabam por se resumir à confusão, à convenção e à falta de pensamento crítico, como se pode esperar de um consenso que nunca foi seriamente desafiado.[3]

Essa perspectiva contemporânea propõe integrar *insights* matemáticos modernos para iluminar textos históricos, sem desconsiderar seu contexto original. Esse meio-termo reconhece que, embora seja crucial preservar a integridade histórica e filosófica do período em que foram produzidas, ferramentas modernas podem esclarecer aspectos técnicos das obras antigas. Assim, a historiografia da matemática evolui em direção a uma abordagem que harmoniza o rigor analítico com a sensibilidade contextual, permitindo uma compreensão mais nuançada do legado de obras como *Os Elementos*.

Conclusão

Os Elementos de Euclides transcendem sua identidade como um tratado de geometria da antiguidade, consolidando-se como um pilar fundamental do pensamento ocidental. A genialidade da obra reside em sua organização dedutiva sistemática, que estabeleceu um paradigma para o raciocínio matemático que perdurou por mais de dois milênios. Ao estruturar proposições a partir de definições, postulados e noções comuns, Euclides criou um modelo de argumentação lógica que não apenas fundamentou a geometria, mas também influenciou disciplinas tão diversas quanto o direito, a filosofia e a programação de computadores. Essa abordagem, baseada na derivação passo a passo de conclusões a partir de premissas consensuais, tornou-se um alicerce do raciocínio estruturado, evidenciando a universalidade e a atemporalidade do método euclidiano.

Embora lógicos modernos identifiquem lacunas no sistema de Euclides — como suposições implícitas sobre continuidade ou o uso de intuições visuais em

diagramas —, uma análise contextual, especialmente sob a perspectiva dialética proposta por Árpád Szabó, revela a riqueza da conquista de Euclides. Longe de ser apenas um exercício de lógica formal, *Os Elementos* podem ser vistos como um empreendimento dialético, enraizado na tradição grega de argumentação estruturada, que visava estabelecer pontos de partida acordados para o discurso geométrico. Essa interpretação realça a sofisticação da obra em seu contexto histórico, desafiando visões anacrônicas que julgam *Os Elementos* exclusivamente pelos padrões modernos.

A influência dos *Elementos* estende-se por mais de dois mil anos, moldando a matemática, a ciência e a filosofia. Desde sua preservação por estudiosos do mundo islâmico até sua redescoberta na Europa medieval, passando pelas inovações da imprensa e pelas reformulações axiomáticas do século XIX, a obra continuou a inspirar avanços intelectuais. No século XXI, sua relevância persiste em campos como a inteligência artificial, exemplificada pelo *AlphaGeometry*, cuja abordagem construtiva ecoa os métodos euclidianos. Assim, o estudo dos *Elementos*, o *Farol de Euclides*, não apenas ilumina a história da matemática, mas também projeta uma luz para a exploração de novos caminhos.

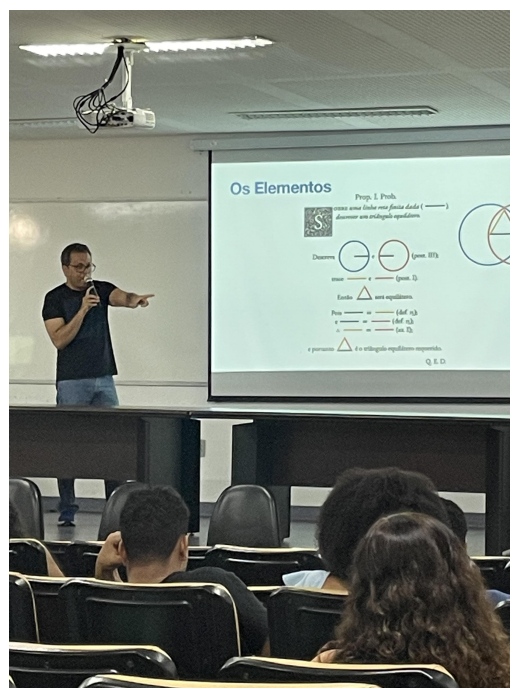


Figura 7: O autor durante a apresentação da palestra “O Farol de Euclides” no Seminário Café Cultural.

Bibliografia

- [1] J. Avigad, E. Dean, and J. Mumma. A formal system for Euclid's elements. *Review of Symbolic Logic*, 2009.
- [2] M. Beeson, J. Narboux, and F. Wiedijk. Proof-checking Euclid. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 2019.
- [3] V. Blåsjö. Critique of the Modern Consensus in the Historiography of Mathematics. *Journal for the History of Mathematics (JHM)*, 2014.
- [4] S. C. Chou. *Mechanical geometry theorem proving*. D. Reidel, 1988.
- [5] P. de Simone. Plato's use of the term stoicheion. Origin and implications. *Revista Archai*, 2020.
- [6] A. Jones. Euclid, the Elusive Geometer. <http://hdl.handle.net/2451/63988>, 2005.
- [7] K. Manders. The euclidean diagram (1995). In *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford University Press, 06 2008.
- [8] J. Mumma. *Intuition Formalized: Ancient and Modern Methods of Proof in Elementary Geometry*. PhD thesis, Carnegie Mellon University, 2006.
- [9] T. Needham. *Visual Differential Geometry and Forms: A Mathematical Drama in Five Acts*. Princeton University Press, 2021.
- [10] C.D. Novaes. *The Dialogical Roots of Deduction*. Cambridge University Press, 2020.
- [11] M. Papini. Uma Descrição da Gênese do Método Axiomático. *Revista de Matemática Hipátia*, 2(1):3–14, 2024.
- [12] V. De Risi. The development of Euclidean axiomatics. *Archive for History of Exact Sciences*, 2016.
- [13] D.L. Santos de Jesus. *Entre a lógica e a retórica: axiomatizações da geometria euclidiana nos séculos XVI e XVII*. Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UFBA, 2023.
- [14] Á. Szabó. *Greek Dialectic and Euclid's Axiomatics*. Studies in Logic and the Foundations. North Holland, 1967.
- [15] Á. Szabó. *The Beginnings of Greek Mathematics*. Springer, 1978.
- [16] G. Thomsen. The treatment of elementary geometry by a group-calculus. *The Mathematical Gazette*, 17(225):230–242, 1933.
- [17] T. H. Trinh, Y. Wu, Q. V. Le, et al. Solving olympiad geometry without human demonstrations. *Nature*, 625:476–482, 2024.
- [18] S. Unguru. On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics. *Archive for History of Exact Sciences*, 1975.
- [19] B. Wardhaugh. *Encounters with Euclid: How an Ancient Greek Geometry Text Shaped the World*. Princeton University Press, 2021.
- [20] H. Zeitler. Axiomatics of geometry in school and in science. *For the Learning of Mathematics*, 10, 1990.



Vinícius Mello nasceu em Salvador e obteve seu doutorado em Computação Gráfica no IMPA. Ensina matemática na UFBA e fica alegre sempre que pode usar o GeoGebra em suas aulas. Gosta de matemática, música e programação em exata proporção, podendo ser encontrado a (quase) qualquer momento fazendo ao menos uma dessas coisas.

BIOGRAFIA

Elinalva Vergasta

Afeto, Matemática e Arte

Dionícarlos Vasconcelos e Elaís Cidely S. Malheiro

Introdução

“Treine o cérebro, mas também cultive a compaixão; eduque o intelecto, mas também desperte a alma.” Inspirado nos ensinamentos de Paramahansa Yogananda, esse princípio — que valoriza tanto o saber quanto a sensibilidade — refletia profundamente a atuação da professora Elinalva Vergasta de Vasconcelos, carinhosamente conhecida como Lina, hoje aposentada pelo Departamento de Matemática da UFBA.



Figura 1: Prof.ª Lina

Este artigo apresenta uma breve biografia da professora Lina, com caráter de celebração e homenagem, trazendo elementos da sua trajetória e história de vida, o seu impacto na formação dos estudantes, seu papel fundamental na criação e coordenação do

Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística da UFBA (LEMA), suas características pessoais e profissionais, o reconhecimento que conquistou ao longo da carreira, e a maneira única com que abordou o ensino da Matemática, unindo rigor técnico e afeto.

Professora Lina foi uma figura extremamente influente e inspiradora na vida de seus alunos e colegas, sempre descrita como uma educadora alegre, dedicada, competente e com uma abordagem inovadora para o ensino da matemática. Seu trabalho no LEMA é amplamente reconhecido como um marco na formação de diversos profissionais, que destacam suas essenciais contribuições para o desenvolvimento acadêmico e humano dos estudantes.

Muitos alunos e colegas mencionam seu carisma, entusiasmo e a forma como ela transformou o ensino da matemática em algo acessível e motivador. Além disso, sua preocupação com o bem-estar e o crescimento pessoal de seus alunos e colegas é um traço constantemente ressaltado nas conversas com os mesmos. O impacto da professora Elinalva vai além da sala de aula, influenciando carreiras, promovendo projetos inovadores e criando um ambiente acolhedor e inspirador para todos ao seu redor.

Nasce uma educadora

Elinalva da Silva Vergasta nasceu em Salvador, no dia 5 de dezembro de 1955. Filha de Eduvaldo Alves Vergasta e Ernestina da Silva Vergasta, cresceu em uma tranquila travessa próxima ao Largo de Roma, onde a paisagem se abria para a Baía de Todos os Santos. Brincava nas areias, jogava futebol na rua em frente

de casa, e desde cedo revelava uma personalidade alegre, criativa e generosa. Ainda na infância, começou a participar da Evangelização do Centro Espírita Caminho da Redenção, passando depois à Juventude Espírita Nina Arueira (JENA), onde desenvolvia atividades como teatrinhos de fantoches e sombras para as crianças, e participava de ações sociais, levando mantimentos e carinho a comunidades em situação de vulnerabilidade, além de contribuir na tesouraria do Centro. Costumava ajudar também em casa, ao lado da mãe, demonstrando senso de responsabilidade e cuidado, desde jovem.



Figura 2: Lina na infância.

O ambiente familiar, cercado por números, teve grande influência em sua trajetória. Seu pai era contador, e tanto sua irmã mais velha quanto seu irmão mais novo cursaram Matemática na UFBA, instituição onde também se graduou o marido, Dionícarlos Vasconcelos, físico de formação. Rodeada por essa atmosfera, Lina escolheu ingressar no Bacharelado em Matemática da UFBA em 1974, ano em que também se casou, passando a se chamar Elinalva Vergasta de Vasconcelos. Apesar da decisão, seu coração guardava um chamado mais artístico. Um teste vocacional feito anteriormente apontava claramente para as artes. Essa veia artística nunca desapareceu: ela se expressava nas interações com crianças, nas brinca-

deiras, nos jograis e nas dramatizações que encantavam os pequenos e deixavam transparecer sua vocação para ensinar com leveza e criatividade.

A espiritualidade, por sua vez, esteve sempre presente. Lina não se limitava a uma única crença: era atuante no Centro Espírita, participava de missas e cultos, e em 1973 passou a frequentar o Grupo de Meditação de Salvador, ao lado do seu então namorado Dioni. Aprofundou-se nos ensinamentos de Paramahansa Yogananda, chegando a participar de convocações da Self-Realization Fellowship (SRF) nos Estados Unidos e, em 1998, viajou à Índia para conhecer de perto a espiritualidade daquele país.

Sobre essas viagens, Cristiana Reis, amiga de Lina da Yoga, lembra com carinho:

Conheci Lina no Grupo de Meditação de Salvador - SRF. Durante o tempo em que convivemos, sempre chamou a minha atenção o seu marcante bom humor. Viajei algumas vezes com ela e outros devotos do Grupo, oportunidade em que pude perceber também a sua extraordinária capacidade de lidar com situações adversas e inusitadas. Quando fomos à Índia em 1998, logo no início da viagem, ela quebrou um dente superior. Encarou a situação de forma divertida, leve e continuou a viagem com o seu contagiante bom humor (e o dentinho colado com "super bonder").



Figura 3: Lina e Dioni na Índia

Mais tarde, como professora universitária e pesquisadora em Geometria Diferencial, encontrou uma maneira de unir todas essas dimensões de sua vida. Passou a construir modelos concretos de superfícies

matemáticas, unindo rigor e criatividade, razão e sensibilidade. Dessa fusão nasceu o LEMA Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística da UFBA, iniciativa que expressa plenamente a educadora que Lina se tornou: uma mulher de números e de alma, que fez da matemática uma linguagem de afeto, beleza e transformação, aliada ao rigor técnico.

Formação, Produção e Atuação

Sempre se destacando nas disciplinas de Exatas, Elinalva Vergasta iniciou sua formação acadêmica na Escola Castro Alves e, posteriormente, no Colégio Estadual João Florêncio Gomes, na Ribeira. Graduiu-se em 1977 como bacharela em Matemática pela UFBA, mesma instituição na qual, dois anos depois, ingressou no mestrado acadêmico, sob a orientação do professor Dr. Jürgen Tolke. Estando como professor visitante do DMAT, ao precisar retornar à Alemanha, seu país de origem, Tolke deixou Lina sem orientação acadêmica formal por um período. No entanto, sabendo que ele viria ao Brasil, mais especificamente, à cidade de Campina Grande, na Paraíba, Lina se deslocou até lá, acompanhada do esposo, para discutir pontos importantes e encaminhar a finalização da dissertação. Já vegetariana, passou os 15 dias da visita alimentando-se basicamente de sanduíche de queijo e pizza.

Com a perseverança de sempre, concluiu sua dissertação na área de Geometria Diferencial, em 1981, sobre Superfícies de Movimento. Neste mesmo ano, iniciou o doutorado no IMPA, onde obteve aprovação em todas as disciplinas, incluindo os intensivos cursos de verão. Porém, a imensa saudade dos filhos, que durante as férias voltavam a Salvador para que ela pudesse se dedicar exclusivamente aos cursos de verão do IMPA, se tornava cada vez mais difícil de conciliar com a demanda acadêmica do doutorado. Tomada pela sensação de que poderia estar sacrificando o bem-estar das crianças, então com 2, 3 e 6 anos de idade, Lina decidiu interromper o doutorado e retornar a Salvador, optando por estar mais presente no cuidado e na criação dos filhos pequenos. Essa escolha, marcada por profundo senso de responsabilidade afetiva, a fez abrir mão do título formal de doutora, mas não do compromisso com a qualidade acadêmica. Anos depois, um valioso reconhecimento da excelência do seu trabalho foi expresso pelo professor da USP, Ernst Hamburger¹, que afirmou, durante vi-

¹Nascido na Alemanha, o físico Ernst Hamburger deu importantes contribuições ao ensino, pesquisa, divulgação e popularização da ciência. Foi membro da Academia Brasileira de Ciências

sita ao LEMA, que as pesquisas ali desenvolvidas poderiam sustentar não apenas uma, mas várias teses de doutorado na área de Educação Matemática.

Em busca de aprofundamento e atualização constantes, participou de diversos cursos de formação complementar em instituições, como o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), a Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), a Universidade Federal do Ceará (UFC) e a própria UFBA. Entre os temas estudados, destacam-se Geometria Riemanniana, Equações Diferenciais Parciais e Ordinárias, Variedades Diferenciáveis, além de cursos voltados ao uso de tecnologias como o Maple V.



Figura 4: Em sala de aula

Sua atuação como professora do ensino superior teve início na Faculdade de Administração da Bahia (atual UNIFACS), onde lecionou de 1983 a 1984. No final deste período, passou a colaborar com o Instituto de Matemática da UFBA (IM-UFBA), hoje chamado de Instituto de Matemática e Estatística da UFBA (IME-UFBA), instituição na qual construiu uma sólida carreira. Aprovada em concurso público para professora auxiliar em 1994, progrediu para os cargos de professora assistente e, posteriormente, adjunta, alcançando o nível Adjunto IV.

Como professora do DMAT, lecionou diversas disciplinas, incluindo Cálculo I, II e IV, Geometria Diferencial, Topologia e Álgebra Linear, sempre aliando rigor matemático à sensibilidade pedagógica. Como lembra com carinho a atual coordenadora do LEMA, professora Cristiana Valente(UFBA), em depoimento² sobre Lina enviado por e-mail aos autores deste ar-

e, entre outros prêmios no Brasil e no exterior, recebeu o Kalinga Prize for the Popularization of Science, concedido pela UNESCO, em 2000, e o Prêmio José Reis de Divulgação Científica do CNPq. Em 2018, Ernst faleceu, com 85 anos.

²O depoimento completo se encontra na Seção 'Relatos sobre Lina'.

tigo:

Meu contato inicial com Elinalva foi como aluna de Topologia e nas suas aulas ficava encantada como ela apresentava esses conteúdos matemáticos, avançados para graduação, de uma forma tão simples e natural. Nessas aulas tive um choque matemático: uma bola pode ser um quadrado! Tudo depende da maneira de medir, dizia Elinalva, como se esse fato fosse algo normal....e um novo mundo se abria pra mim.



Figura 5: A primeira e a atual coordenadoras do LEMA.

Seu compromisso com a educação pública e de qualidade se expressa também por meio da extensão universitária: Lina coordenou quase 40 projetos de extensão no DMAT, contribuindo diretamente para a democratização do conhecimento matemático e a formação cidadã dos estudantes. Nesse percurso, orientou mais de 50 estudantes de graduação em atividades diversas de iniciação científica, extensão e ações educativas junto a escolas públicas. Foi ainda responsável por organizar diversos eventos ao longo dos anos, com destaque para as exposições do LEMA e para a coordenação da organização da II Biental da Sociedade Brasileira de Matemática, eventos marcantes na interface entre matemática, arte e educação.

Além da atuação no ensino, pesquisa e extensão, Lina atuou em diversas atividades administrativas, incluindo a vice-direção do então IM-UFBA e a vice-chefia do DMAT. Requereu sua aposentadoria em 2010, ano em que lançou dois livros pela Editora da

UFBA (Edufba): 'Superfícies Isométricas ao Plano Construção de Modelos Concretos com Cilindros e Cones', em coautoria com Graça Dominguez, Maria Christina Cardoso e Verlane Cabral; e 'Sólidos e Superfícies Construção de Modelos Concretos', com Ednalva Vergasta Andrade, Maria Christina Cardoso e Maria das Graças Sousa.

Mesmo após sua aposentadoria, permaneceu intelectualmente ativa e colaborativa. Participou da elaboração de mais uma obra, 'Planificação de Pirâmides', em parceria com Cristiana Valente, Maria Christina Cardoso, Maria das Graças Sousa, Rita de Cássia e Verlane Cabral, demonstrando que seu compromisso com o ensino e a construção de saberes ultrapassava os limites do tempo formal de serviço como professora e educadora.

Sua produção acadêmica, embora não sempre registrada em periódicos de grande circulação, teve importante impacto na UFBA, especialmente por meio da formação de estudantes, orientação em projetos de iniciação científica e criação de materiais didáticos e modelos concretos de sólidos e superfícies matemáticas. O legado de Elinalva na Educação Matemática é, assim, tanto tangível quanto inspirador.

Como afirma o professor Kleyber Mota, o atual diretor do IME-UFBA, em relato enviado aos autores:

A trajetória acadêmica e institucional da professora Elinalva é uma referência para todos nós. Ao longo de sua carreira, a professora Elinalva destacou-se pelo compromisso com o ensino de qualidade, pela dedicação à formação de professores e por sua incansável atuação em prol da valorização do ensino de matemática. Sua aposentadoria em 2010 marcou o encerramento de um ciclo brilhante, mas seu legado continua presente no IME e na memória de colegas, alunas e alunos. Entre suas inúmeras contribuições ao Instituto, merece destaque especial o Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística (LEMA). O LEMA, idealizado e estruturado sob sua liderança, tornou-se referência nacional, abrigando projetos que impactaram significativamente a formação de alunos e professores. A professora Elinalva não apenas deixou marcas institucionais profundas, mas também inspirou gerações com sua sensibilidade, competência e compromisso com o ensino de qualidade.

LEMA e o Impacto no ensino e formação de estudantes



Figura 6: O sorriso diante dos modelos do LEMA.

Ao longo de sua trajetória, a professora Lina destacou-se por sua alegria, criatividade e profundo comprometimento com o ensino da Matemática. Sua didática envolvente e seu entusiasmo contagiante tornavam suas aulas experiências marcantes, capazes de transformar a percepção que muitos estudantes tinham da disciplina. Para diversos ex-alunos, suas aulas e orientações foram decisivas para manterem-se motivados na graduação, enxergando a Matemática de forma mais humana, acessível e prazerosa.

Um dos pilares dessa transformação foi o LEMA. Inspirado em cursos de aperfeiçoamento de professores realizados em 1992 e 1993, o Laboratório de Ensino de Matemática foi instalado em 1996, na sala 148 do então IM-UFBA, com o nome e os recursos do Projeto Laboratório Referencial das Licenciaturas da UFBA, referente ao PROGRAD-1995. Com relação à área de Matemática, o citado projeto teve como principais objetivos iniciais: fortalecer a formação acadêmica dos licenciandos em Matemática, inserindo-os nas atividades de laboratório; e abrigar os cursos de atualização e de aperfeiçoamento destinados aos professores do Ensino Médio e Fundamental da rede pública de ensino, fortalecendo a integração da UFBA com a rede pública estadual e municipal, constituindo-se num ponto de referência para as escolas públicas.

Em 1997, o laboratório promoveu a primeira exposição no SESC, apresentando um pequeno acervo de modelos construídos no âmbito do projeto. Nesse mesmo ano, foi desenvolvido o primeiro programa de monitoria com estudantes, que também serviu para prepará-los para atuarem como expositores já na se-

gunda exposição, realizada em 1999.

Miriam Mascarenhas, professora aposentada do DMAT, que também atuou na criação do laboratório, recorda com carinho desse início, em [4]:

A minha experiência com ela [Lina] no laboratório, surgiu desde o embrião. Ainda sonho com muitas conversas e ideias. Mas com a dedicação incansável, trabalho, estudo, pesquisa, elaboração de projetos... nasceu o LEMA. Participei de várias bienais, exposições em escolas e no IM-UFBA, com a equipe de professores e alunos, e apesar de pouca verba, era tudo feito com muito amor, com muita alegria, e estudo. O ambiente não podia ser melhor[...].

Desde então, o laboratório consolidou-se como um espaço singular de formação docente, ensino e extensão, adotando oficialmente, em 2007, o nome Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística da UFBA (LEMA). Hoje, o LEMA conta com 3 salas no IME-UFBA: 150 (sala de estudos para monitores, bolsistas e voluntários do LEMA, compartilhada com os estudantes do PIBID), 142 (conhecida como ateliê) e a 141, que abriga o acervo atual de aproximadamente 200 modelos concretos direcionados para o ensino fundamental, médio e superior. Produzidos ao longo dos anos por estudantes e professores envolvidos em suas atividades, além da colaboração da artista plástica Fabiana Laranjeiras, esses modelos são utilizados para aulas de disciplinas do Departamento de Matemática, Estatística, Física, além de estarem disponíveis para ações junto à comunidade externa da UFBA, como feiras, exposições e oficinas.

Prestes a completar 30 anos de existência, o LEMA já realizou inúmeras exposições em Salvador, em outras cidades da Bahia e do Brasil, e até em Angola. O laboratório também recebe com frequência a visita de estudantes de escolas e universidades, em atividades cuidadosamente organizadas pela coordenadora do LEMA, Cristiana Valente, e pela vice-coordenadora, professora Denise Viola, do Departamento de Estatística da UFBA (DEST). A equipe atual para organização de atividades e elaboração de projetos do LEMA ainda conta com as professoras Elaís Cidely S. Malleiro (DMAT) e Lilia Costa (DEST).

Lina foi a mente e o coração por trás da criação do LEMA, coordenando com inteligência e sensibilidade uma equipe diversa de professores e estudantes. Sua liderança acolhedora e persistente fez do laboratório um verdadeiro berço de experiências inovadoras na formação de professores de Matemática. O egresso



Figura 7: LEMA.

do DMAT, Renivaldo Sodré, hoje professor da Universidade Federal do Ceará, sintetizou o impacto dessa convivência em [4]:

A Prof. Elinalva Vergasta me ajudou a entender e olhar o mundo com um olhar geométrico e humano. Minha história no LEMA-UFBA coincide com a minha trajetória na UFBA. Ingressei na Instituição, no dia 31 de maio de 2004. E, nesse mesmo dia, foi apresentado o projeto LEMA-UFBA pelas professoras Cristiana Valente e Elinalva Vergasta. A Lina entrou na sala de recepção dos calouros com um chapéu de Sherlock na cabeça, com muito carinho e muito entusiasmo, falava e convidava a gente para participar do projeto. Nesse mesmo dia, ingressei no projeto LEMA-UFBA, fui a orelha seca, fui a orelha gorda, vivi intensamente o LEMA. E o LEMA contribuiu de maneira fundamental, na minha formação profissional e pessoal.

Sob sua orientação, o LEMA impactou diretamente o ensino de Matemática em toda a Bahia. Diversos ex-estudantes lembram com carinho do laboratório como uma grande escola, onde se aprendia não apenas conteúdos matemáticos, mas também como ensinar com criatividade, ludicidade e eficiência. Lina estava sempre presente orientando construções, organizando exposições, viajando com os alunos para encontros científicos e cuidando para que todos se sentissem valorizados. Mesmo estudantes do bacharelado, não diretamente ligados à licenciatura, se envolviam nas atividades do laboratório, demonstrando o alcance e o apelo da proposta pedagógica que Lina cultivou.

Durante três décadas como professora do Instituto de Matemática, Lina recebeu inúmeros reconheci-



Figura 8: Renivaldo com o famoso chapéu de Sherlock, na homenagem pra Lina de 2019.

mentos formais e informais por sua atuação no ensino de Matemática. Foi escolhida por diversas turmas de formandos como patronesse, paraninfa, madrinha ou amiga da turma um reflexo do carinho e da gratidão que despertava em seus alunos. O seu trabalho à frente do laboratório ganhou destaque nacional, com convites para diversas oficinas e exposições, incluindo em edições da Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática.

Em 2018, foi aprovada em reunião da Congregação do IME, que estava, na época, sob a direção do professor Evandro Santos, a nomeação da sala 141 do IME como "Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística / Prof.^a Elinalva Vergasta de Vasconcelos". Este importante reconhecimento do Instituto à principal responsável pela criação e consolidação do LEMA culminou em uma emocionante cerimônia de homenagem à Lina, organizada sob a coordenação da professora Cristiana Valente, em 2 de dezembro de 2019.

Quinze anos após sua aposentadoria, Lina continua influenciando na formação de alunos(as), na atuação de docentes e na vida de ex-estudantes, colegas e amigos.

Em janeiro de 2025, o projeto de extensão do DMAT "Projeto Egressos dos Cursos de Matemática da UFBA, Conectando Passado, Presente e Futuro no IME" (PECMat) promoveu uma homenagem à professora Elinalva, organizada sob a coordenação da professora Elaís Cidely.

Esta homenagem contou com uma oficina destinada a estudantes da graduação em Matemática do



Figura 9: Durante homenagem 2019, com o professor Evandro.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA - Unidade de Salvador), no dia 21 de janeiro, e uma palestra, no auditório do IME, dia 23 de janeiro, seguida da exibição de vídeo com depoimentos sobre Lina de ex-estudantes e amigos que não puderam estar presentes na ocasião, além de emocionantes relatos de participantes presentes.

A oficina intitulada 'Demonstração do Teorema de Pitágoras' foi ministrada por Paulo Malta, professor do IFBA (Unidade de Porto Seguro), que também é egresso do DMAT e ex-aluno de Lina. Ao ser indagado pela organização do evento sobre ter dirigido quase 800km, de Porto Seguro a Salvador, apenas para ministrar a oficina, o professor respondeu:

Se tratando de atividade relacionada à Elinalva ou ao LEMA, pode sempre contar comigo, faço questão de participar, independente de onde eu estiver e do quanto precisar me deslocar.

Já a palestra, intitulada "Minha Vida Como Rato de Laboratório: Impactos do LEMA em Minha Trajetória Acadêmica e Pessoal", foi ministrada pelo doutorando em Matemática na UFBA e também professor do IFBA (Unidade de Salvador) Fellipe Antônio. Como evidencia o próprio título da palestra, Fellipe atuou de forma intensa no LEMA durante a sua graduação, e já como professor do IFBA, foi um dos principais responsáveis pela implementação do Laboratório de Matemática do IFBA (LEMAT). Em relato enviado aos autores, ele resalta características marcantes em Lina:

Quando você pergunta dela a qualquer pes-

soa que a conhece, certamente vão falar do carisma, da simpatia, da boa vontade e do bom humor. Inevitável não falar da criatividade, da leveza e da competência. Todos os estudantes preferiam fazer disciplina com ela e todos admiram-na profundamente. Era comum ela aconselhar seus alunos mesmo depois que deixavam de ser seus alunos. Era como mãe pra muitos: ela escutava, orientava, acolhia, puxava a orelha. Lina ensinava não apenas conteúdos e matemática, embora fizesse prioritariamente isso de forma magistral...a convivência com ela nos dava exemplo de valores como honestidade, retidão, compromisso, humildade, humanidade, dedicação, perseverança. Quando a ideia de um modelo vinha, ela tomava nota, nem sempre as coisas funcionavam de primeira, na verdade, muitos modelos do LEMA de hoje são versões melhoradas, fruto de pesquisa, esmero, dedicação e perseverança. Ainda há alguns que até hoje são ideias que ainda não tomaram forma. Hoje com o advento da cultura maker, eu vejo que Elinalva era um bom exemplo de "teto alto" e "paredes largas", ela não limitava a criatividade dos estudantes e orientava como aproveitar o máximo. Também não dá pra falar de Elinalva sem se referir à energia canalizada à dedicação; era comum receber e-mails escritos na madrugada ou vê-la com uma listinha de coisas grande, o empenho em redigir projetos, revisar, unir pessoas diferentes em prol de um mesmo objetivo. Ela também era muito generosa: oferecia sempre algum lanche, alguma fruta, perguntava se precisávamos de carona, ficava preocupada com nossa segurança quando inventávamos de sair tarde... Elinalva é para mim um grande exemplo: de família, de mulher, de professora, de ser humano, de liderança, de criatividade, de estudo.

A homenagem foi para Lina, mas a comunidade do IME foi presenteada com a presença da própria professora, que estava acompanhada do seu marido Dioní e sua cunhada Ionevera Vasconcelos. Entre os participantes, além de atuais estudantes e docentes do DMAT, também estiveram presentes diversos professores aposentados do DMAT. Este encontro de gerações, impulsionado pela potente e inesquecível atuação da professora Elinalva no DMAT, resalta como o legado de Lina segue vivo nos gestos, nas memórias

e nas escolhas de quem teve o privilégio de aprender com ela. Sua presença serena e afetuosa foi mais do que simbólica: foi a confirmação de que verdadeiros educadores continuam ensinando, mesmo depois da sala de aula.



Figura 10: Homenagem 2025, promovida pelo projeto de extensão PECMat.

Relatos sobre Lina

Os depoimentos abaixo de ex-alunos, colegas e amigos foram gravados para as homenagens à Lina realizadas em dezembro de 2019 e janeiro de 2025, ou enviados aos autores do presente artigo.

Jamille Vilas Bôas, professora do IFBA:

Eu me recordo muito bem, no primeiro dia da graduação, em um dado momento, foi convidado a coordenadora do Laboratório de Matemática da UFBA pra gente conhecer. E chega a professora Elinalva, com a representação de um quadrado e quatro triângulos retângulos na mão, para ilustrar o Teorema de Pitágoras. E fez tudo aquilo parecer uma mágica. Me encantou muito aquela possibilidade. E, a partir de então, eu não saí do lado dela. Foram muitos projetos, muitas exposições, muitas atividades no Laboratório de Matemática da UFBA que eu participei. E o LEMA é isso, e a professora Elinalva também, representa a minha trajetória dentro da UFBA. Fico muito feliz por poder falar isso para ela. E emocionada, porque inspirou também o meu mestrado sobre a participação de alunos utilizando materiais manipulados em sala de aula no ensino da matemática. O meu doutorado teve a ver com isso também.

Manuela Souza, professora da UFBA:

Lina fez parte da minha formação, tanto nas atividades e exposições do LEMA, que durou

a época do Bacharelado e Mestrado, como também sendo minha professora de Geometria Diferencial. Meu primeiro contato com essa área aconteceu através do modelos de superfícies mínimas do LEMA, logo no primeiro ano de graduação. Lina influenciou, certamente, muito da minha prática docente hoje e é uma referência de como aliar ensino e pesquisa em Matemática, porque, sim, o LEMA-UFBA é, também, sobre pesquisa em Matemática.

Belmiro Galo, professor da Rensselaer Polytechnic Institute(EUA):

Nossa querida professora Lina. Lina, muito obrigado por todo o apoio que você deu no meu tempo de UFBA com cálculo IV. E também como seu monitor versátil do LEMA. Nunca um monitor oficial, mas sempre estava ali quebrando um galho. Lembro de um momento marcante quando tinha acabado de tirar minha habilitação, não sabia dirigir direito, e véspera de uma exposição que a gente tinha no departamento, você me deu a chave do seu carro e falou "vai lá no Instituto de Física, pega lá os materiais que estão lá, estamos precisando e, não tenho tempo...". Você estava na correria, meu Deus, meu pé tremia para dirigir seu carro. Acho que foi a primeira vez que dirigi um carro fora da autoescola. Foi o seu carro, [você] só me deu a chave, e falou "vai", e confiou em mim. Deu tudo certo, não dei nenhum arranhão, e passou. Mas sua paixão pela matemática, pelo departamento e pela educação foi contagiante e estou aqui hoje sendo professor também da universidade, aqui no exterior, e muito feliz por toda a sua contribuição. Obrigadão Lina.

Sílvia Veloso, professora aposentada do DMAT:

Fui contemporânea de Lina no curso de matemática e depois nos tornamos colegas de trabalho como professores do Instituto de Matemática da UFBA. Nossos caminhos convergiram em alguns projetos e o maior deles foi o LEMA, criado e idealizado por Lina, e eu sempre brincava: ela é a cabeça do laboratório e nós somos os membros. Ela conseguiu formar uma equipe muito boa e agregou muitos alunos de uma forma assim muito harmoniosa. Isso era um marco

de Lina. Ela tinha essa capacidade além de muitas outras características muito marcantes. Ela era uma pessoa inteligente, muito estudiosa, esforçada, com a capacidade incrível de coordenação, de manter todo mundo em paz, em equilíbrio, dedicado, se dedicando, sempre sorrindo. Não existia dificuldade nem tempo ruim para a Lina. Eu lhe quero muito bem, foi muito bom ter trabalhado com você. O tempo é curto para ele dizer qualquer coisa mais, mas desejo tudo de bom para você, Lina. E você é muito especial para mim e na minha caminhada, na minha construção como profissional. Um beijo no coração.

Márcio Peixoto, vizinho de Lina:

Falar de Lina é falar de PORTAS ABERTAS! Sim, não só pelo fato de termos sido vizinhos por 26 anos, as portas da sua casa viviam sempre abertas para os amigos, e para mim que sempre fui quietinho senão encontrasse aberta por qualquer razão, eu pulava a varanda, mas mais importante que isso, Lina nos abriu portas para um conhecimento valioso... foi ela quem me apresentou ao primeiro computador, quantas vezes me levou ao teatro, me encorajou a encenar peças, a me tornar síndico mirim do nosso condomínio, as idas à praia (na inesquecível Belina azul) quantos filmes vimos, quantas pizzas na Ilforno, quantas risadas demos juntos, quantas caronas, quantas lições... Homenagear Lina é olhar pra trás e abraçar uma fase muito especial da minha vida... agradeço por ter me permitido beber dessa fonte de conhecimento sem nem sequer me dar conta, naquela época, do quão importante isso representaria para mim nos dias atuais! Obrigado, querida vizinha! Parabéns por essa homenagem.

Fabiana Laranjeiras, artista plástica:

Elinava em minha vida, teve uma participação grandiosa como educadora. Lina me conheceu no fim do ano de 1996, quando eu era estudante de Belas Artes e ela queria desenvolver as superfícies dos modelos das Quádricas em resina. Como o trabalho com a resina não deu muito certo, desenvolvemos as pesquisas com a técnica de Papietã, que até hoje está sendo trabalhada

com os alunos das disciplinas do LEMA. Eu, quando estudante, aprendi muito com a organização de textos, arquivos de imagens e vídeos, registros fotográficos e de vídeos nas visitas e exposições do LEMA, o que me trouxe muito conhecimento técnico computacional proposto por Lina. E uma das coisas mais importantes além do apoio técnico artístico na construção e restauração dos modelos que até hoje estão sendo expostos no LEMA-UFBA, foi a participação como ilustradora (vetorizadora) dos desenhos dos 2 livros escritos pelas professoras que compunham o quadro de fundadoras do nosso querido laboratório. O resumo da minha passagem pelo LEMA-UFBA é GRATIDÃO!

Cristiana Valente, professora da UFBA e atual coordenadora do LEMA:

Falar sobre Elinalva, uma querida amiga, pseudo-mãe matemática e "ídola", é muito fácil! O difícil é lembrar de toda a lista de tudo que tenho que relatar sobre ela, mas vamos lá... Meu contato inicial com Elinalva foi como aluna de Topologia e nas suas aulas ficava encantada como ela apresentava esses conteúdos matemáticos, avançados para graduação, de uma forma tão simples e natural. [...]. Depois recebi seu apoio para fazer mestrado na USP e quando precisei voltar para Salvador, ela me enviou material de Geometria Analítica para fazer seleção para professor substituto no antigo Instituto de Matemática, atualmente IME. Depois seu apoio continua no processo de preparação para o concurso e, então, com a aprovação, viramos colegas! Nosso convívio foi aumentando e a amizade cada vez mais, por conta de vários projetos que trabalhamos juntas e também pelo convívio social com amigos comuns. Mas só depois que entrei no LEMA que pude realmente acompanhar seu trabalho de perto. Além de participar de exposições, algumas em viagem, projetos com outros professores e alunos, ela me convidou para apresentar palestras, oficinas de construção de modelos, etc. Isto é, me deu oportunidades de muitos trabalhos que nunca tinha realizado. Depois ela me convidou para coordenar exposições e com isso, sem eu perceber(rsrsrs) foi me preparando para eu coordenar o LEMA, quando

se aposentasse. Elinalva foi uma profissional completa, porque atuava no ensino, pesquisa e extensão, além de trabalhar na parte administrativa da UFBA. Elinalva era assim: as ideias iam surgindo e ela ia convidando as pessoas, professores e/ou alunos, para estudar Matemática, produzir novos materiais, como por exemplo modelos concretos, etc, com o objetivo de facilitar o aprendizado em Matemática. Tudo isso sem impor ideias, respeitando o limite de cada um. Outra coisa que admiro muito é como Elinalva fez com que o LEMA crescesse, conseguindo mais espaço em salas, mobiliário, aumentando o acervo dos modelos, organizando exposições em vários estados do nosso país, tornando o laboratório reconhecido nacionalmente. E o mais incrível foi que, apesar da fama, Elinalva nunca se colocou em evidência, nem fazia propaganda de ser a fundadora e coordenadora do LEMA. Gostaria também de destacar a maneira com que Elinalva procurava resolver os problemas que surgiram, sempre com firmeza, mas de forma leve, sem confrontar as pessoas de forma ríspida, procurando o diálogo. De todos os projetos, o LEMA é o que mais trabalhamos juntas e que continua até esse momento com o trabalho da elaboração de mais um livro sobre construção de modelos concretos, junto com nossas queridas companheiras Christina, Graça Passos, Verlane, Ritinha e a grande contribuição da saudosa Nalvinha. Por esses motivos (e outros que provavelmente vão terminar surgindo quando eu reler esse texto), Elinalva, além de amiga maravilhosa e profissional excepcional, é um exemplo de ser humano especial... humilde, respeitadora, amorosa. E tenho certeza que me tornei uma matemática e uma pessoa melhor por causa dela!

Lina, presença que permanece

Hoje, Lina segue colhendo o carinho de todos que a admiram, cercada pela família, amigos e pelas alegrias que semeou ao longo do caminho. Nas visitas ao IME, o sorriso presente segue despertando abraços cheios de carinho e gratidão. Sua presença é sempre uma celebração da matemática, da vida e da beleza de ensinar com paixão.

Neste dezembro de 2025, Lina completará 70 anos



Figura 11: Família.

de uma vida marcada pelo entusiasmo, pela leveza e por uma dedicação profunda ao ensino da Matemática. Para ela, ensinar era mais do que transmitir conteúdos: era abrir caminhos de compreensão e encantamento. Sua forma de pensar e ensinar matemática também expressava esse traço estético e afetivo: o raciocínio claro, a organização das ideias, a curiosidade em movimento. O LEMA é, sem dúvida, uma das expressões mais marcantes do seu legado: um espaço construído com carinho, competência e visão pedagógica, que formou não apenas professores, mas também cidadãos comprometidos com a Educação Matemática, que carregam um pouco de sua forma de ver e viver a Matemática: com afeto, competência e... arte.

Bibliografia

- [1] *Superfícies Isométricas ao Plano: Construção de Modelos Concretos com Cilindros e Cones*. Editora da UFBA (Edufba), 2010.
- [2] *Sólidos e Superfícies: Construção de Modelos Concretos*. Editora da UFBA (Edufba), 2010.
- [3] *Homenagem promovida pelo IME-UFBA*. 2019.
- [4] *Homenagem promovida pelo projeto de extensão PECMat*. 2025.



Figura 12: Afeto, Matemática e Arte.



Dionícarlos Soares de Vasconcelos foi professor de Física do Instituto de Física da UFBA de 1976 a 2010 e da UNIFACS após a aposentadoria por 4 anos até 2017. Fez graduação e Mestrado na UFBA e doutorado no CBPF, Rio de Janeiro. Foi diretor do Instituto de Física, chefe do Departamento de Física do Estado Sólido, assessor de Informática e diretor do CPD da UFBA na gestão do Reitor Felipe Serpa. Trabalhou em pesquisa na área de Difração de Raios-X e Estruturas Incomensuráveis. Orientou muitos alunos em Iniciação Científica e Mestrado.



Elaís Cidely S. Malheiro é baiana, nascida na cidade de Macaúbas. Possui graduação e mestrado em matemática pela UFBA, doutorado em matemática pelo IMPA e, desde 2015, é professora do IME-UFBA. Sua área de pesquisa é Sistemas Dinâmicos, com ênfase em Teoria Ergódica. Atualmente, é coordenadora local do PICME-UFBA e vice-coordenadora institucional do PROFMAT-UFBA. Além disso, coordena o projeto de extensão "Projeto Egressos dos Cursos de Matemática da UFBA, Conectando Passado, Presente e Futuro no IME" (PECMat) e atua em outros projetos de extensão, como o "Treinamento Olímpico de Matemática da UFBA" (TOM). Na adolescência, tocou bateria em uma banda do colégio. Durante o doutorado, tocava alfaia em um grupo carioca de maracatu. Mas desde 2021, tem o CrossFit como parte indispensável da sua rotina.

TEOREMA

A Hipótese Generalizada do Contínuo Implica o Axioma da Escolha

Samuel Gomes da Silva e Diego Lima Bomfim *

Introdução

O Axioma da Escolha surgiu “oficialmente” em 1908 a partir da publicação, por Ernst Zermelo, de dois trabalhos ([12, 13]) que marcaram o início da axiomatização da *Teoria dos Conjuntos*, tendo sido utilizado pela primeira vez quatro anos antes pelo mesmo autor em sua demonstração de que todo conjunto pode ser bem ordenado ([11]) – que por sua vez é conhecido como Teorema da Boa Ordenação (denotado por **WO**, de *Well-Ordering Theorem*).

Devido ao seu caráter não-construtivo, **AC** (como é geralmente denotado o Axioma da Escolha – advindo de *Axiom of Choice*) foi, e ainda é, alvo de muita discussão e polêmica: afinal, ele garante ao trabalhador matemático a tentadora possibilidade de fazer infinitas escolhas arbitrárias. Em termos simples, ele garante que dada uma família de conjuntos não-vazios sempre é possível obter um conjunto que tem exatamente um elemento escolhido em cada conjunto da família, no que se diz que toda família de conjuntos não-vazios admite uma *função-escolha*¹.

Tal axioma tem aceitação bastante variada, a depender do ramo da matemática e do contexto em que se aplica. Por um lado, admite várias implicações (ou mesmo equivalências) muito conhecidas e importantes, de peso central em várias áreas da Matemática – equivalências como o *Lema de Zorn*, o *Teorema de Krull* sobre a existência de ideais maximais

em anéis comutativos com unidade (da Álgebra), e o *Teorema de Tychonoff*² (da Topologia Geral), e consequências como o *Teorema do Ultrafiltro*, ou o *Teorema de Hahn-Banach* (da Análise Funcional). Por outro lado, o Axioma da Escolha também implica alguns resultados bastante contraintuitivos, como o famoso *Paradoxo de Banach-Tarski*, o qual demonstra ser possível dividir uma esfera tridimensional em um número finito de peças e reorganizá-las (usando apenas movimentos rígidos) de modo a formar duas esferas do mesmo tamanho que a original.

Não obstante, temos que **AC** é independente dos axiomas da teoria dos conjuntos usual, a chamada *Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel* — denotada por **ZF** —, o que significa que ele não pode ser provado nem refutado a partir dos axiomas básicos da teoria. Devido a isso, o axioma da escolha é considerado um axioma adicional, culminando na axiomática **ZFC** dada por **ZF** + **AC**, a *Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha*.

Já a *Hipótese do Contínuo* — conjecturada por Cantor nos anos 1880, e muito provavelmente a mais célebre asserção matemática cuja independência de **ZFC** já foi demonstrada — declara que, dado um subconjunto infinito da reta real, então devemos ter que este conjunto está em bijeção ou com o conjunto dos números naturais ou então com a própria reta.

O contexto que levou Cantor a enunciar tal conjectura (à qual vamos nos referir como **CH**, de *Conti-*

*O segundo autor teve o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

¹Uma função-escolha para uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos não-vazios é uma função que efetivamente “escolhe” um elemento de cada um dos membros da família, mais precisamente é uma aplicação $f: \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{F}$ satisfazendo $f(F) \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

²Para um enunciado e demonstração do Teorema de Tychonoff — o qual declara que todo produto de espaços topológicos compactos é compacto —, indicamos nossa principal referência em Topologia Geral, que é [2]. Uma prova (em português) da equivalência entre **AC** e o Teorema de Tychonoff pode ser encontrada em [5].

uum Hypothesis) foi resultado de uma série de tentativas fracassadas de exibir algum subconjunto da reta com cardinalidade intermediária entre $\aleph_0$ (a cardinalidade de $\mathbb{N}$) - e c (o *continuum*, a cardinalidade de $\mathbb{R}$), o que culminou na sua hipótese de que tal feito seria impossível: uma questão tão importante à época que ocupou a primeira posição na lista dos famosos 23 problemas de Hilbert, na virada para o século XX.

Assim, **CH** pode ser traduzido em uma linguagem mais técnica de teoria dos conjuntos (assumindo o Teorema da Boa Ordenação)³ como a afirmação de que não existe nenhum cardinal intermediário entre $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$ (sendo este último cardinal igual a c , já que tem a mesma quantidade de elementos do que o conjunto das partes de $\mathbb{N}$ - sendo este último, por sua vez, equipotente ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, sendo que a existência dessa bijeção *não depende do Axioma da Escolha*).

As consequências dos estudos sobre a Hipótese do Contínuo são bastante numerosas, o que levou por exemplo à sua natural generalização, a chamada *Hipótese Generalizada do Contínuo* (**GCH**, de *Generalized Continuum Hypothesis*), a qual (assumindo novamente a boa ordenação dos conjuntos) é a afirmação de que, assim como no caso anterior, não existe nenhum cardinal na lacuna entre qualquer cardinal $\aleph_\alpha$ e o cardinal $2^{\aleph_\alpha}$.

Embora a prova da independência de **CH** tenha vindo apenas em 1963, no contexto da invenção do método de *forcing* por Paul Cohen — independência essa que complementou um trabalho anterior de Kurt Gödel de 1940 —, um resultado de 1947 devido a Sierpiński ([8]) pulula aos olhos: ele estabelece que **GCH**, que mimetiza a organização suprema dos cardinais, acaba tendo poder dedutivo o suficiente para implicar o Axioma da Escolha. Neste artigo veremos a prova desta implicação com uma demonstração um pouco diferente da original de Sierpiński, dado que a demonstração a ser apresentada utiliza o *Teorema de Specker*.

³A necessidade desta ressalva advém da transição de uma pergunta específica para uma asserção de caráter universal. Com efeito, enquanto a formulação original de Cantor se restringe a subconjuntos da reta real, a afirmação de que não existe *nenhuma* cardinalidade intermediária em todo o universo dos conjuntos requer que todas as cardinalidades, de todos os conjuntos, possam ser dispostos em uma única hierarquia ordenada — propriedade esta que é garantida precisamente pelo Teorema da Boa Ordenação, sob o qual todos os conjuntos possuem “ordinais iniciais” — i.e., “alephs” — como suas cardinalidades.

Primeiras Definições

Para fixar as ideias vamos dar enunciado formal para algumas das asserções que comentamos:

Axioma da Escolha (AC): O produto cartesiano de conjuntos não vazios é um conjunto não-vazio.⁴

Teorema da Boa Ordenação (WO): Todo conjunto pode ser bem-ordenado.⁵

Lema de Zorn (ZL): Toda ordem parcial não-vazia na qual toda cadeia é limitada superiormente admite um elemento maximal.

Mostra-se que tais asserções são logicamente equivalentes em **ZF** (uma demonstração em português desse fato pode ser vista em [5]); no entanto, devido à ampla utilização de **AC**, à muito menor utilização de **WO** e dificuldade de compreensão inicial do enunciado de **ZL**, existe uma famosa anedota (atribuída ao matemático norte-americano Jerry Bona) na qual se diz que o Axioma da Escolha é obviamente verdadeiro, enquanto o Teorema da Boa Ordenação é obviamente falso e “quem pode dizer alguma coisa sobre o Lema de Zorn?”.

A difusão desta piada mostra como a noção intuitiva pode ser traída pela rigidez matemática, uma vez que a equivalência das asserções, embora clara, é motivo de muita polêmica no meio matemático.



Devido à referida equivalência entre **AC** e **WO** e à nossa futura definição de cardinalidade, em boa parte das situações vamos querer comparar conjuntos sem ter que falar de suas cardinalidades — já que, sendo o Teorema da Boa Ordenação uma equivalência do Axioma da Escolha, assumir que todo conjunto tem alguma cardinalidade (em sua definição usual, a qual será apresentada mais adiante mas que *somente se aplica a conjuntos que possam ser bem ordenados*) acaba sendo equivalente a assumir o Axioma da Escolha, o que muitas vezes queremos evitar.

Com vistas a comparar a quantidade de elementos de conjuntos que não necessariamente possam ser bem ordenados, apresentamos as seguintes definições: dizemos que um conjunto x é **dominado** por um con-

⁴Note que esta formulação é equivalente à apresentada anteriormente: por definição, um elemento do produto cartesiano de uma família de conjuntos $\mathcal{F}$ é uma função a qual, também, “escolhe” exatamente um elemento de cada conjunto $F \in \mathcal{F}$.

⁵Uma ordem sobre um conjunto é dita ser uma *boa ordem* se for uma ordem total na qual todo subconjunto não-vazio admite elemento mínimo. O exemplo canônico é o conjunto dos números naturais com a ordem usual.

junto y (denotado por $x \leq y$) se existe uma função $f: x \rightarrow y$ que é injetiva, e dizemos que x é **equipotente** a y (denotado $x \approx y$) se existe uma função $f: x \rightarrow y$ que é bijetiva.

Depreende-se desta definição que dizer que um conjunto é dominado por outro significa intuitivamente pensar que “aquele tem tamanho menor do que este”. Como indício positivo dessa intuição temos o famoso Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder (o qual o primeiro autor deste artigo prefere, como também em outras referências disponíveis na literatura, enunciar como “Teorema de Schröder-Bernstein-Cantor” – de modo que sua sigla se torne S.B.C., ao que se segue uma anedótica alusão à cidade de São Bernardo do Campo, em São Paulo, seu Estado originário).

Teorema. (ZF)⁶ S.B.C. - Schröder-Bernstein-Cantor. Se a e b são conjuntos tais que a é dominado por b e b é dominado por a então temos que a é equipotente a b .

Para podermos avançar e definir a cardinalidade de um conjunto (o que será feito em breve, após cuidadosa preparação), precisamos primeiro introduzir o conceito de **números ordinais**, os quais podem ser entendidos como uma generalização dos números naturais e que são utilizados para descrever a estrutura de qualquer conjunto que possa ser bem-ordenado.

Formalmente, um ordinal é um conjunto x que satisfaz duas condições: ele é *transitivo* — isto é, sempre que valer $z \in y \in x$ tem-se $z \in x$ (ou, equivalentemente, $\bigcup x \subseteq x$) — e é bem-ordenado pela própria relação de pertinência, $\in$. A partir desta definição, adota-se uma notação bastante intuitiva: ordinais são indicados por letras gregas minúsculas (α, β, γ , etc.) e a relação de ordem $\in$ é denotada pelo símbolo $<$, de modo que se escreve $\alpha < \beta$ em vez de $\alpha \in \beta$. Uma consequência fundamental desta estrutura é que um ordinal coincide com o conjunto de todos os ordinais menores do que ele; ou seja, para todo α vale que $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$. É precisamente esta propriedade que confere aos ordinais seu papel como representantes canônicos das boas ordens, no sentido de que toda boa ordem é isomorfa a um (e único) ordinal.

⁶Observamos que a singela notação “(ZF)” tem aqui um papel fundamental, pois sinaliza que o resultado pode ser demonstrado utilizando-se apenas os axiomas de Zermelo-Fraenkel, ou seja, sem a necessidade de se invocar o Axioma da Escolha. Este é um fato crucial para a nossa discussão, uma vez que estamos estabelecendo ferramentas para comparar conjuntos em um ambiente onde AC não é pressuposto.

Os ordinais finitos, nesta construção, são exatamente os *números naturais de von Neumann*: $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, $2 := \{0, 1\}$, ..., $n := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, ... Consequentemente, o menor ordinal infinito é ω , que é o próprio conjunto de todos os números naturais.

Finalmente, podemos introduzir a noção de cardinalidade (a qual pode ser bastante difícil de lidar, no caso de conjuntos que *não possam* ser bem-ordenados). Se por algum motivo (ainda em **ZF**, digamos !) sabemos que um conjunto x pode ser bem ordenado, podemos definir a **cardinalidade** de x como sendo o menor ordinal que é equipotente a x , o qual denotamos por $|x| = \min\{\alpha \mid x \approx \alpha\}$ ⁷. A partir daí, um ordinal α será dito um **cardinal** exatamente quando tiver a si mesmo como sua cardinalidade, ou seja, se $|\alpha| = \alpha$.

Além disso, observamos que dados a e b conjuntos, denotamos por ${}^a b$ o conjunto das funções de a em b , e supondo que ${}^a b$ possa ser bem ordenado (assunção essa que vale trivialmente sob AC, dado que este último é equivalente a **WO**), temos que a cardinalidade de ${}^a b$ é dada justamente pela cardinalidade de b elevada a cardinalidade de a .

Esta última definição tem importante destaque no caso particular no qual $b = 2 (= \{0, 1\})$, pois sabemos que o conjunto das partes de um conjunto a qualquer está sempre em bijeção com o conjunto das funções de a em 2, ou seja, vale que ${}^a 2 \approx \mathcal{P}(a)$. Traduzida para a linguagem de cardinais, obtemos a bem conhecida igualdade $2^\kappa = |{}^\kappa 2| = |\mathcal{P}(\kappa)|$ para qualquer cardinal κ , finito ou infinito.



Em nosso contexto, destacamos duas ferramentas matemáticas que nos permitem trabalhar, em **ZF**, com o “tamanho” de conjuntos sem ter que falar de cardinalidades (em particular, sem ter que discutir se tal conjunto pode ou não ser bem ordenado): a primeira é o **Teorema de Cantor** — cuja demonstração utiliza o famoso *Argumento Diagonal de Cantor* —, o qual afirma que para qualquer conjunto x vale que x é estritamente dominado pelo conjunto das suas partes ($x < \mathcal{P}(x)$), isto é, temos que existe uma injeção de x em $\mathcal{P}(x)$, mas que nenhuma injeção pode ser sobrejetiva. Já a segunda é o chamado **número de Hartogs**, que permite comparar um conjunto x com

⁷Notar que, sob o Axioma da Escolha, *todo* conjunto poderá ser bem-ordenado, e assim essa definição que demos para a cardinalidade — à qual sempre nos referiremos como sendo a *definição usual* — poderá ser aplicada uniformemente para todos os conjuntos.

os números ordinais mesmo que x não possa ser bem ordenado: dado x conjunto qualquer, o número de Hartogs de x é, exatamente, o menor ordinal β tal que β não pode ser injetado em x ($\beta \not\leq x$); denotamos este menor ordinal simplesmente por $H(x)$ ⁸.

Argumento Diagonal de Cantor

Suposta lista de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$

	0	1	2	3	...
S_0	1	0	1	0	...
S_1	0	1	1	0	...
S_2	1	1	0	1	...
S_3	0	0	1	1	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
D	0	0	1	0	...

O conjunto D difere de cada S_n da lista no n -ésimo elemento.

Portanto, D não pode estar na lista!

Figura 1: O Argumento Diagonal de Cantor em ação. A figura mostra como, a partir de uma suposta lista enumerável completa de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ (indicados na matriz via a representação por suas funções características), é possível construir um novo subconjunto, D . A construção de D (indicada pelas setas vermelhas) se dá pela inversão dos elementos da diagonal (destacada em amarelo), garantindo que D seja diferente de todos os subconjuntos na lista. Isso mostra que não existe uma função injetora de $\mathbb{N}$ em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ que seja sobrejetora.

Embora a última definição possa ser aplicada a qualquer conjunto, temos um fenômeno interessante caso esse conjunto possa ser bem ordenado: de fato, se κ é um cardinal, então $H(\kappa)$ é o menor cardinal que não é menor ou igual a κ , ou seja, $H(\kappa)$ é (pela tricotomia dos ordinais) o menor cardinal que é maior

⁸ $H(x)$ é o menor ordinal que não pode ser injetado em x exatamente pelo fato dele ser, estruturalmente digamos, exatamente o conjunto de *todos os ordinais que podem ser injetados em x* !

que κ , ou seja, é o cardinal sucessor de κ . Esta observação nos permite definir recursivamente (por *recursão transfinita sobre os ordinais*) a chamada **Hierarquia dos Alephs**: definimos $\aleph_0 := \omega$, o menor cardinal infinito; dado um ordinal α e seu correspondente $\aleph_\alpha$ já definido, definimos $\aleph_{\alpha+1} := (\aleph_\alpha)^+$, onde $(\aleph_\alpha)^+$ é, pelo que vimos, $H(\aleph_\alpha)$; por fim, dado um ordinal limite⁹ γ definimos $\aleph_\gamma := \sup \{\aleph_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$.

Além disso, é interessante observar que a função de Hartogs é utilizada na prova da equivalência com o Axioma da Escolha de uma asserção que, num primeiro momento, parece ser inofensiva, trivial ou absolutamente intuitiva (e a qual, por conta dessa aparência tão intuitiva, muitos poderiam acreditar que a mesma deveria ser um teorema de **ZF** – o que não é!). Seja então **CC** (de “Comparação de Cardinalidades”) a seguinte asserção:

“Se A e B são conjuntos quaisquer,
então $A \leq B$ ou $B \leq A$ ”

Ou seja, **CC** simplesmente afirma que, dados dois conjuntos quaisquer, deveria ser verdade que poderíamos *compará-los por funções injetoras*, de modo a descobrir “qual dos dois conjuntos é o maior (*por conter uma cópia do outro*)”. **CC** segue diretamente de **AC** via **WO**: dados os conjuntos A e B , por **WO** podem ser ambos bem ordenados e portanto suas cardinalidades são definidas da maneira usual, e assim sendo $\kappa = |A|$ e $\lambda = |B|$, a tricotomia existente entre ordinais (logo, entre cardinais também) resolve a situação facilmente.

Por outro lado, **CC** implica **AC** (também via **WO**): pois dado um conjunto A qualquer, considere $B = H(A)$. Como B não pode ser dominado por A neste caso particular, vale $A \leq B$ por **CC**, e, por poder ser injetado no ordinal $H(A)$, é imediato usar essa injeção para definir uma boa ordem em A , o que verificaria que “todo conjunto pode ser bem ordenado”¹⁰.

Com estas definições e observações, principalmente no que se refere à Hierarquia dos Alephs, podemos retornar a nossa discussão sobre a Hipótese do Contínuo com uma outra linguagem: de fato, temos do

⁹Um ordinal γ é dito ser um *ordinal limite* se ele não for o zero e tampouco for um *ordinal sucessor*, isto é, não existir nenhum ordinal β tal que $\gamma = \beta \cup \{\beta\} = \beta + 1$. De forma intuitiva, são os ordinais que não possuem um antecessor imediato, como é o caso de ω , o primeiro ordinal limite.

¹⁰Em particular, temos aqui um dos principais “monstros” que aparecem na ausência do Axioma da Escolha: em um modelo de **ZF** no qual **AC** seja falso, seguramente existem conjuntos que são *incomparáveis segundo a relação de dominação* – de modo que não teremos como saber qual dos dois é o maior conjunto!

Teorema de Cantor que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$, e, como $\aleph_1$ é o sucessor de $\aleph_0$, concluímos que $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. Assim, o que **CH** diz é que nesta última expressão vale a igualdade, enquanto $\neg\text{CH}$ (a negação de **CH**) diz que vale a desigualdade estrita.

Em suma, na linguagem dos alephs, o significado de **CH** é justamente traduzido pela equação

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

— donde a reta teria o menor tamanho possível. E, utilizando este mesmo raciocínio, temos que para um ordinal α vale $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$, donde $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$, e **GCH** seria justamente a afirmação da igualdade para cada um dos ordinais α , isto é, é a afirmação de que vale $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, para cada α ordinal (o que é claramente uma generalização de **CH**).

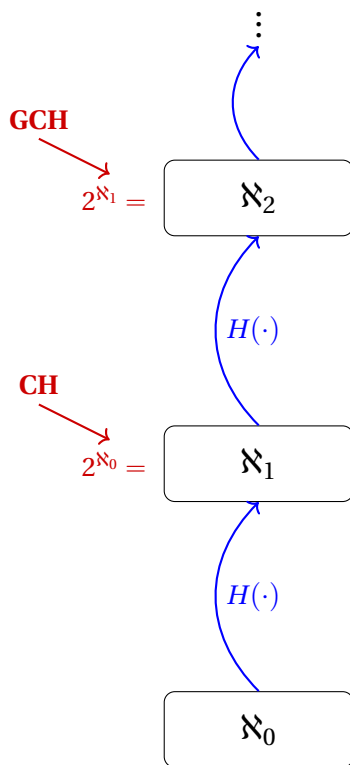


Figura 2: A hierarquia dos cardinais infinitos. A seta azul indica a função de Hartogs $H(\cdot)$, que leva um cardinal $\aleph_\alpha$ ao primeiro cardinal estritamente maior, que é $(\aleph_\alpha)^+ = \aleph_{\alpha+1}$. A GCH (e CH como caso particular), indicada em vermelho, estabelece que não há cardinais intermediários entre $\aleph_\alpha$ e $2^{\aleph_\alpha}$ (sendo este último maior do que $\aleph_\alpha$ pelo Teorema de Cantor), forçando a igualdade entre o cardinal sucessor $\aleph_{\alpha+1}$ e a potência $2^{\aleph_\alpha}$.

Não obstante, observando que um conjunto arbitrário dado não necessariamente pode ser bem-ordenado em **ZF** — e como o nosso objetivo neste artigo é justamente provar **AC** (que é equivalente a **WO**)

assumindo **GCH** em **ZF**, precisamos enunciar **GCH** em uma versão que não faça referência aos números cardinais: com efeito, daqui pra frente **GCH** será entendida como a seguinte asserção (*):

“Para quaisquer conjuntos X e Y infinitos, se X é dominado por Y , e este por sua vez é dominado por $\mathcal{P}(X)$, então vale que X é equipotente a Y ou que Y é equipotente a $\mathcal{P}(X)$.”

Assim, identificaremos, em **ZF**, a seguinte asserção (*) com **GCH**:

(*) “Para quaisquer X e Y infinitos,
 $X \leq Y \leq \mathcal{P}(X) \implies X \approx Y$ ou $Y \approx \mathcal{P}(X)$.”

Chamamos a atenção para o fato de que a asserção acima “plasma” a ausência de alternativas, digamos assim, que temos — em termos do tamanho de um conjunto infinito X — para os conjuntos que estejam “ensanduichados” entre o conjunto X e o conjunto de suas partes $\mathcal{P}(X)$ (na comparação de tamanho por funções injetoras): um tal conjunto deverá ser equipotente ou a X ou a $\mathcal{P}(X)$, não havendo possibilidades para “tamanhos intermediários”.

Resultados Intermediários

Com essas definições podemos apresentar alguns teoremas intermediários, cujas demonstrações fogem do escopo deste texto, por isso omitiremos.

O primeiro teorema estabelece uma importante característica dos cardinais infinitos que, obviamente, os diferencia dos cardinais finitos, que é a idempotência com respeito ao produto (seja produto cartesiano ou produto de cardinais):

(ZF) Teorema

Para todo κ cardinal infinito vale que $\kappa \times \kappa \approx \kappa$.

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em qualquer uma das principais referências modernas para a Teoria dos Conjuntos, como por exemplo [4] ou [6]. Como vimos que o Axioma da Escolha é equivalente ao Teorema da Boa Ordenação (donde cada conjunto infinito tem como cardinalidade um cardinal infinito κ), temos o seguinte corolário:

(ZF) Corolário

AC implica que para todo X conjunto infinito vale que $X \times X \approx X$.

Por fim, temos que a recíproca deste resultado também é verdadeira, num resultado que é atribuído a Tarski (de 1924), sendo sua prova uma argumentação bastante mais elaborada e que faz uso da função de Hartogs.

(ZF) Teorema (Tarski) [10]

Se para todo X conjunto infinito vale que $X \times X \approx X$, então temos que **AC** é válido.

Na última seção deste artigo voltaremos a dar destaque a esse resultado clássico de Tarski.

Com os dois últimos resultados, concluímos que em **ZF** vale que **AC** é equivalente à asserção “para todo X conjunto infinito vale a equipotência dada por $X \times X \approx X$ ”. No que segue, vamos utilizar exatamente essa conclusão para implicar o Axioma da Escolha.

Finalmente, observamos que a prova que apresentamos é levemente diferente daquela apresentada originalmente por Sierpiński em 1947 [8], dado que incorporamos resultados provados logo depois (em 1954) por Specker [9].

Resultados Principais

Chegamos agora aos principais resultados que gostaríamos de trabalhar, sendo o primeiro o já citado Teorema de Specker. A sua demonstração é relativamente longa, mas é aqui que está grande parte do trabalho, e após superarmos este desafio estaremos praticamente prontos para mostrar o resultado desejado.

11

(ZF) Teorema de Specker [9]

Se X é um conjunto com pelo menos 5 elementos, então $\mathcal{P}(X)$ não é dominado por X^2 (isto é, $\mathcal{P}(X) \not\leq X^2$).

Observa-se que a hipótese deste teorema é extremamente razoável: ora, sabemos que para um conjunto X finito com n elementos vale que a cardinalidade do conjunto $\mathcal{P}(X)$ é exatamente 2^n , enquanto que a cardinalidade de $X \times X$ é $n \cdot n = n^2$, e a expressão $2^n \not\leq n^2$ se verifica para todo número natural n maior ou igual a 5 (e note que $2^4 = 4^2$).

¹¹Para nossa demonstração do resultado de Specker, bem como dos passos subsequentes até chegarmos na verificação de que **GCH** implica **AC**, seguimos as linhas da exposição de Lévy no seu clássico livro [7].

Já a idéia da demonstração consiste em tomar $H(X)$, o número de Hartogs de X , e, ao supor por absurdo que exista uma função $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow X^2$ que é injetiva, construir uma sequência injetora (com respeito aos índices) $\langle x_\alpha \mid \alpha < H(X) \rangle$ de elementos de X com comprimento $H(X)$, o que implicaria $H(X) \leq X$, uma contradição com a definição que demos para a função de Hartogs.

Demonstração: Sejam X conjunto e $\lambda := H(X)$, e suponha por absurdo que exista uma $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow X^2$ função injetiva. Vamos construir uma sequência de elementos de X conforme o descrito anteriormente:

Primeiramente, dado que X tem pelo menos 5 elementos, podemos tomar x_0, x_1, x_2, x_3 e x_4 2-a-2 distintos de forma arbitrária. A partir daí vamos argumentar indutivamente: seja n com $5 \leq n < \omega$ tal que $\langle x_\alpha \mid \alpha < n \rangle$ é uma sequência injetora já construída; se $n < \lambda$, aplicando a hipótese de indução vamos obter o elemento x_n .

Considere $C_n = \{x_\alpha \mid \alpha < n\}$, a imagem da sequência $\langle x_\alpha \mid \alpha < n \rangle$. Note que dado um subconjunto U de C_n vale que U é um elemento de $\mathcal{P}(X)$, donde podemos nos perguntar o que acontece com $f(U)$.

Afirmamos que existe pelo menos um subconjunto U de C_n tal que $f(U)$ não pertence a $C_n \times C_n$, que é subconjunto de X^2 . Com efeito, esta afirmação é uma mera aplicação do bastante conhecido *Princípio da Casa dos Pombos*.

Suponha que não valesse a afirmação. Nesse caso, como sabemos que $\mathcal{P}(C_n)$ tem 2^n elementos e que $C_n \times C_n$ tem n^2 elementos (e $n \geq 5$ implica $2^n > n^2$), estamos numa situação na qual “temos mais pombos do que casas”, isto é, existiriam dois subconjuntos U e U' de C_n distintos tais que $f(U) = f(U')$, o que contradiz a assunção de f ser injetiva.

Assim, concluímos que existe pelo menos um $U \subseteq C_n$ com $f(U) \notin C_n \times C_n$. Além disso, temos que este U pode ser tomado de forma não arbitrária: para isso, dado que o conjunto dos subconjuntos finitos de ω é um conjunto infinito enumerável, podemos tomar uma única vez uma enumeração sobre este conjunto e a partir daí induzir uma boa ordem natural em cada um dos conjuntos $\mathcal{P}(C_n)$ identificando cada subconjunto de C_n pelo conjunto dos índices de seus elementos, os quais constituem uma boa ordem pela enumeração fixada anteriormente¹².

¹²Em particular, o nosso argumento *indutivo* pode ser, na verdade, tornado *recursivo* – no sentido de que existe, essencialmente, um algoritmo recursivo bem definido para a construção

Com isso, conseguimos fixar construtivamente um $U \subseteq C_n$ tal que $f(U)$ é elemento do conjunto $X \times X \setminus C_n \times C_n$, o que garante que alguma das duas coordenadas de $f(U)$ não pertence a C_n de modo que podemos tomar essa coordenada como nosso próximo elemento da sequência que queremos definir.

Formalmente, definimos $x_n := \pi_1(f(U))$ caso valha que $\pi_1(f(U))$ não pertence a C_n , e $x_n := \pi_2(f(U))$ no caso contrário. Assim, é claro que x_n está bem definido e é um elemento de X que não pertence a C_n , de modo que a sequência $\langle x_0, \dots, x_{n-1}, x_n \rangle$ é, portanto, injetora.

Caso o conjunto X seja finito, temos que X é claramente bem ordenado, e $|X|$ é um número natural, donde λ é simplesmente $|X| + 1$, e o argumento anterior é suficiente para provar o teorema.

Por outro lado, caso X não seja finito temos que λ é um cardinal infinito, donde $\lambda \geq \omega$, e o argumento acima mostra que podemos construir uma sequência $\langle x_\alpha \mid \alpha < \omega \rangle$ de elementos de X que é injetora.

Agora, se por acaso $\omega < \lambda$, ainda devemos mostrar como expandir esta sequência. Para isso, vamos utilizar um argumento similar ao anteriormente feito:

- Seja $\omega \leq \beta < \lambda$ tal que $\langle x_\alpha \mid \alpha < \beta \rangle$ é uma sequência injetora de elementos de X já construída, e faça $C_\beta = \{x_\alpha \mid \alpha < \beta\}$, como antes;
- Agora, considere a bijeção canônica¹³ $f_\beta: \beta \rightarrow \beta \times \beta$ que é obtida usando-se as potências ordinais de ω ("Forma Normal de Cantor"), e também uma bijeção $F_\beta: C_\beta \rightarrow C_\beta \times C_\beta$ naturalmente induzida por f_β ;
- Como antes, queremos determinar canonicamente um subconjunto U de C_β tal que $f(U)$ não pertence a $C_\beta \times C_\beta$ e aplicar o mesmo argumento anterior para determinar o próximo elemento da sequência;
- Como f é função injetiva de $\mathcal{P}(X)$ em $X \times X$, podemos definir uma função h_β que se comporta como uma espécie de inversa de f restrita a $C_\beta \times C_\beta$: formalmente, definimos $h_\beta: C_\beta \times C_\beta \rightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que dado $\langle a, b \rangle$ em $C_\beta \times C_\beta$, vale que $h(\langle a, b \rangle)$ é igual a $f^{-1}(\langle a, b \rangle)$ se $\langle a, b \rangle$ pertence a imagem de f , e $h(\langle a, b \rangle) = \emptyset$ caso contrário;

dessa sequência.

¹³Essa bijeção canônica f_β é bastante menos conhecida do que aquela existente entre um cardinal κ e seu quadrado $\kappa \times \kappa$ (dado que esta última está presente na maioria dos livros-texto). O leitor mais curioso poderá encontrar uma descrição de sua construção no blog de Andrés Caicedo ([1]).

- Note que $h_\beta(\langle a, b \rangle) = \bigcup f^{-1}[\{\langle a, b \rangle\} \cap \text{im}(f)]$;
- Com isso, podemos definir $g := h_\beta \circ F_\beta$ como a composição que sai de $C_\beta \subseteq X$ e vai para $\mathcal{P}(X)$, que associa cada elemento $x_\alpha \in C_\beta$ da sequência já construída em um $g(x_\alpha) \in \mathcal{P}(X)$, subconjunto de X .
- Definamos agora o subconjunto U de C_β constituído dos elementos x_α que não pertencem a $g(x_\alpha)$, isto é, $U = \{x_\alpha \in C_\beta \mid x_\alpha \notin g(x_\alpha)\}$;
- Utilizando um tipo de argumento bastante similar ao argumento diagonal de Cantor, temos que U não pertence à imagem da função g : com efeito, se U pertencesse à imagem de g então existiria um x_γ em C_β tal que $g(x_\gamma) = U$, mas daí $x_\gamma \in U$ implicaria pela definição de U que $x_\gamma \notin g(x_\gamma) = U$, enquanto $x_\gamma \notin U$ implicaria pela definição de U que $x_\gamma \in g(x_\gamma) = U$, o que é absurdo;
- Dito isso, afirmamos que este subconjunto de C_β satisfaz o desejado, isto é, que $f(U)$ não pertence a $C_\beta \times C_\beta$: com efeito, se não fosse este o caso, teríamos que existe um elemento x_δ em C_β tal que $F_\beta(x_\delta) = f(U)$, pois foi estabelecido que F_β é uma bijeção entre C_β e $C_\beta \times C_\beta$;
- Como x_δ pertence ao domínio da função g , podemos calcular $g(x_\delta)$, donde

$$g(x_\delta) := (h_\beta \circ F_\beta)(x_\delta) = h_\beta(F_\beta(x_\delta)) = h_\beta(f(U)) = U,$$
 onde esta última igualdade é válida devido à h_β se comportar como a inversa de f para elementos da imagem desta função;
- Da equação acima segue que U pertenceria à imagem de g , contradizendo a conclusão, obtida via argumento diagonal, de que U não pode pertencer à imagem de g ;
- Com isso, conseguimos apontar construtivamente um subconjunto U de C_β tal que $f(U)$ não pertence a $C_\beta \times C_\beta$, e exatamente como no caso finito, construímos x_β não pertencente a C_β , de modo que a sequência $\langle x_\alpha \mid \alpha \leq \beta \rangle$ é injetora.

Utilizando este último argumento como passo indutivo em uma indução sobre o cardinal λ temos que existe uma sequência $\langle x_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$ de elementos de X que é injetora.

Esta construção, como explicado no começo, é uma contradição com λ ser o número de Hartogs de X , o que implica que tal não pode ser feita, donde não existe função de $\mathcal{P}(X)$ em X^2 injetiva, e o teorema está finalmente demonstrado. $\square$

Superada esta demonstração, vejamos um corolário rápido que será diretamente utilizado para demonstrar o resultado principal. Para auxiliar a sua demonstração, vamos definir a **União Disjunta** de dois conjuntos A e B pondo

$$A \oplus B := (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}).$$

(ZF) Corolário do Teorema de Specker

Se X é um conjunto infinito e n é um número natural qualquer, então $n \times X$ é estritamente dominado por $\mathcal{P}(X)$, isto é, $n \times X < \mathcal{P}(X)$.

Note que o resultado é imediato se $n = 0$, pois o produto cartesiano de n com X seria o conjunto vazio; além disso, se $n = 1$, estaremos diante do Teorema de Cantor, e o resultado é imediatamente verdadeiro. Assim, podemos assumir que n é maior ou igual a 2. Na verdade, para nosso objetivo final o caso que importará será precisamente $n = 2$.

Demonstração: Como X é um conjunto infinito e n é um número natural (maior ou igual a 2), podemos fixar um subconjunto Y de X com Y equipotente a n , e escrever $Y = \{y_j \mid j < n\}$.

Definindo $Z := X \setminus Y$, temos que Z é um conjunto infinito, e que $n \times X$ é a união disjunta entre $n \times Z$ e $n \times Y$.

Devido a isso, temos que $n \times X$ é equipotente a $((n \times Z) \oplus n^2)$, pois a função que leva $(i, z) \in n \times Z$ em $(i, z, 0)$ e $(i, y_j) \in n \times Y$ em $((i, j), 1)$ claramente é bijetiva.

Por outro lado, como $n^2 \leq Z$, e para todo $n \geq 2$ vale que $n \leq 2^{n-1}$, temos que $((n \times Z) \oplus n^2)$ é dominado por $(2^{n-1} \times Z) \oplus Z$, que por sua vez é dominado por $(2^{n-1} + 1) \times Z$.

Como este último é dominado por $2^n \times Z$ concluímos que $n \times X \leq 2^n \times Z$. Além disso, temos que $2^n \times Z$ é equipotente a ${}^n 2 \times Z$ (pois a quantidade de funções de n em 2 coincide com o tamanho do conjunto das partes de n , que é igual a 2^n), que por sua vez é equipotente a ${}^Y 2 \times Z$.

Como pelo teorema de Cantor vale $Z \leq \mathcal{P}(Z) \approx {}^Z 2$, temos que ${}^Y 2 \times Z$ é dominado por ${}^Y 2 \times {}^Z 2$, que por sua vez é equipotente a ${}^{Y \cup Z} 2$, pois Y e Z são disjuntos.

Mas ${}^{Y \cup Z} 2$ é igual a ${}^X 2$, que é equipotente a $\mathcal{P}(X)$.

Concluimos assim que:

$$\begin{aligned} n \times X &\leq 2^n \times Z \\ &\approx {}^n 2 \times Z \\ &\approx {}^Y 2 \times Z \\ &\leq {}^Y 2 \times {}^Z 2 \\ &\approx {}^{Y \cup Z} 2 \\ &= {}^X 2 \\ &\approx \mathcal{P}(X) \end{aligned}$$

Portanto, vale que $n \times X$ é dominado por $\mathcal{P}(X)$. Contudo, se valesse a dominação reversa, teríamos que $\mathcal{P}(X) \leq n \times X \leq X \times X = X^2$, contradizendo o Teorema de Specker.

Com isso segue que $n \times X \leq \mathcal{P}(X)$ e que, portanto, $n \times X \not\approx \mathcal{P}(X)$. $\square$

Finalmente chegamos ao resultado desejado.

(ZF) Teorema de Sierpiński [8]

A Hipótese Generalizada do Contínuo implica o Axioma da Escolha:

$$\underbrace{\text{GCH}}_{(*)} \implies \text{AC}$$

Recordamos que para esta prova em **ZF** estamos identificando **GCH** com seu enunciado dado por $(*)^{14}$, e que em **ZF** também vale que o Axioma da Escolha é equivalente à sua mais conhecida forma cardinal – que é aquela devida a Tarski e dada por “para todo conjunto infinito X vale que X^2 é equipotente a X ”. Nesta demonstração vamos implicar esta última asserção.

Demonstração: Seja X um conjunto infinito. Assim, é imediato que X é dominado por $2 \times X$; pelo corolário anterior vale que $2 \times X$ é estritamente dominado por $\mathcal{P}(X)$, ou seja, vale que:

$$X \leq 2 \times X < \mathcal{P}(X).$$

Como estamos assumindo $(*)$, esta expressão implica que X tem que ser equipotente a $2 \times X$.

Por outro lado, vale pelo teorema de Cantor que X^2 é dominado por $(\mathcal{P}(X))^2$, que por sua vez é equipotente a $({}^X 2)^2$, que também é equipotente a $2({}^X 2)$.

Como $2({}^X 2)$ é equipotente a $2^{2 \times X} 2$, e acabamos de mostrar que $2 \times X$ é equipotente a X , concluímos que:

¹⁴“Para quaisquer X e Y infinitos, $X \leq Y \leq \mathcal{P}(X) \implies X \approx Y$ ou $Y \approx \mathcal{P}(X)$.”

$$\begin{aligned}
(X)^2 &\leq (\mathcal{P}(X))^2 \\
&\approx \binom{X}{2}^2 \\
&\approx 2^2 \binom{X}{2} \\
&\approx 2^{2 \times X} 2 \\
&\approx X 2 \\
&\approx \mathcal{P}(X),
\end{aligned}$$

donde segue que X^2 é dominado por $\mathcal{P}(X)$. Como pelo Teorema de Specker vale que $\mathcal{P}(X) \not\leq X^2$, concluímos que $X^2 < \mathcal{P}(X)$.

Por fim, temos que $X \leq X^2 < \mathcal{P}(X)$, donde novamente por (*) vale que $X \approx X^2$, como queríamos mostrar. $\square$

Notas e Sugestões

Conforme já comentado, as demonstrações combinatórias (de Sierpiński e de Specker) para o resultado principal deste artigo valem-se diretamente, e de forma crucial, da equivalência de AC na forma cardinal devida a Tarski ("Para todo conjunto X infinito vale que $X^2 \approx X$ "). No que segue, apresentamos ao leitor mais interessado um roteiro de exercícios guiados os quais, quando combinados, consistem em uma prova da equivalência dessa asserção com o Axioma da Escolha.

Para este "sprint final", seguimos os passos da referência [3]. Lembre-se que, como estamos querendo ao final mostrar uma equivalência para o Axioma da Escolha, no que segue nós *não podemos usar o Axioma da Escolha em nenhuma passagem*, ou seja, os seguintes exercícios guiados devem ser realizados em ZF.

Iniciamos com um exercício que dá mais trabalho do que aparenta a princípio!

Exercício 0. Se A e B são conjuntos disjuntos, ambos possuindo *mais do que um elemento*, então

$$A \cup B \leq A \times B.$$

(Sugestão: Siga o seguinte roteiro:

- Convença-se que a hipótese de que ambos A, B possuem mais do que um elemento *não pode ser descartada!!!*

Dica: Note que $1 + 1 \not\leq 1.1 \dots$

- Ache o *erro* na seguinte demonstração (note com certeza essa demonstração a seguir está errada

porque a essa altura você já exibiu um contra-exemplo conforme sugerido no começo do roteiro, que está logo acima, porém acreditamos ser salutar que você *identifique exatamente onde está o erro*):

Fato(?): "Se A e B são conjuntos disjuntos não-vazios, então vale que $A \cup B \leq A \times B$."

Demonstração(?): "Fixe x em A e y em B .

Defina $\varphi: A \cup B \rightarrow A \times B$ pondo, para cada elemento $t \in A \cup B$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \langle t, y \rangle & \text{se } t \in A; \text{ e} \\ \langle x, t \rangle & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, φ é injetora."

Procure desenhar o que essa φ faz. Ela realmente *parece* ser injetora, não é? Mas *qual é o problema* dela, o qual acarreta que na verdade ela *não é* injetora?

- Para facilitar a definição da função *realmente* injetora que vai ser construída, você pode supor s.p.g. que seus conjuntos disjuntos são da forma $A \times \{0\}$ e $B \times \{1\}$ (*certo?* Ou seja, podemos tomar *quaisquer* dois conjuntos A, B , ambos com mais do que um elemento, e considerar cópias disjuntas deles na hora de definir a função e argumentar sobre a injetividade).
- Agora, fixe $x \neq y$ em A e $z \neq w$ em B . Verifique que a φ definida a seguir,

$$\varphi: (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}) \rightarrow A \times B$$

resolve o problema da tentativa frustrada e é, de fato, injetora. É instrutivo, novamente, fazer um desenho para entender como essa função usa o fato de termos dois elementos em cada um dos conjuntos, na hora em que vamos defini-la, e em como ela "dribla o problema" da tentativa frustrada.

$$\varphi(\langle t, i \rangle) = \begin{cases} \langle t, z \rangle & \text{se } i = 0 \text{ e } t \neq x; \\ \langle t, w \rangle & \text{se } i = 0 \text{ e } t = x; \\ \langle x, t \rangle & \text{se } i = 1 \text{ e } t \neq z; \text{ e} \\ \langle y, t \rangle & \text{se } i = 1 \text{ e } t = z. \end{cases}$$

- Finalmente, conclua o desejado!!!)

Exercício 1. (Este é fácil! E é uma versão cardinal de um *produto notável*!) Voltando a usar a notação da

união disjunta $\oplus$, mostre que, para quaisquer conjuntos A e B , vale que

$$(A \oplus B)^2 \approx A^2 \oplus (2 \times A \times B) \oplus B^2.$$

Exercício 2. Prove o seguinte:

Lema. Sejam A e B conjuntos, e suponha que B possa ser bem-ordenado. Nessas condições, se $A \oplus B \approx A \times B$ então $A \leq B$ ou $B \leq A$.

Sugestão: Fixe inicialmente uma função bijetiva $f: A \oplus B \rightarrow A \times B$ e uma boa ordem $<$ sobre B . A partir de agora daremos algumas indicações do que deve ser feito, mas as conclusões ficarão a cargo do leitor!!!

Pois bem: divida a demonstração em 2 casos:

Caso 1. Existe $a \in A$ tal que $(a, b) \in f[A \times \{0\}]$ para todo $b \in B$.

(Graficamente: “Existe uma coluna do produto cartesiano inteiramente contida na imagem de $A \times \{0\}$ ”.)

Neste caso temos

$$B \approx \{(a, b) : b \in B\} \subseteq \dots$$

e neste caso teremos $\dots \leq \dots$

Caso 2. Suponha que não vale o Caso 1. Neste caso, o conjunto $X_a = \{b \in B : (a, b) \in f[B \times \{1\}]\}$ é não-vazio para todo $a \in A$.

(Graficamente: “Toda coluna intersecta a imagem de $B \times \{1\}$ ”.)

Como, por hipótese, B é bem ordenado por $<$, use a boa ordem para definir $g: A \rightarrow B$, pondo $g(a) = \dots$ (lembre-se do que significa B estar bem ordenado!). Segue agora que

$$A \approx \{(a, g(a)) : a \in A\} \subseteq \dots$$

e neste caso teremos $\dots \leq \dots$

Exercício 3. (Surpreendentemente óbvio, se você se lembra da principal propriedade da função de Hartogs! E que *todo subconjunto de um conjunto bem ordenado pode ser bem ordenado* ...) Prove o seguinte:

Corolário do Lema do Exercício 2. Seja A um conjunto infinito qualquer. Se vale que

$$A \oplus H(A) \approx A \times H(A)$$

então A pode ser bem-ordenado.

Exercício 4. Prove o

Fluxo Lógico do Teorema de Tarski

(Esboço da prova $(2) \Rightarrow (1)$)

Hipótese: Para todo conjunto infinito X , vale a equipotência $X^2 \approx X$.

Usando a hipótese e os Exercícios 0 e 1, prova-se que para qualquer conjunto infinito A , vale a relação: $A \oplus H(A) \approx A \times H(A)$.

Pelo Exercício 3 (Corolário do Lema), a relação acima implica que todo conjunto infinito A pode ser **bem-ordenado**.

O Teorema da Boa Ordenação (todo conjunto pode ser bem-ordenado) é classicamente equivalente ao **Axioma da Escolha (AC)**.

Figura 3: Fluxograma ilustrando o caminho lógico da prova do Teorema de Tarski. A figura demonstra como a hipótese de que $X^2 \approx X$ para todo conjunto infinito X leva, através de passos intermediários, à validade do Axioma da Escolha (AC).

Teorema de Tarski. São equivalentes, em **ZF**:

(1) **AC**.

(2) Para todo conjunto infinito X vale que $X^2 \approx X$.

(*Sugestão:* Siga o seguinte roteiro:

- Conforme já comentado, (1) implica (2) é imediato, pelo fato de $\kappa \approx \kappa^2$ ser válido para todo cardinal infinito κ em **ZF**, e, sob **AC**, qualquer conjunto infinito X vai ter sua cardinalidade definida da maneira usual, e a partir daí é só transferir propriedades combinatórias da cardinalidade do conjunto para o próprio conjunto (dado que, sob a definição usual, o conjunto e sua cardinalidade são equipotentes!).
- Pois bem! Assumamos (2). Afirmamos que vale

WO, ou seja, que todo conjunto pode ser bem ordenado! O que nos é suficiente, dado que **WO** é uma das mais conhecidas equivalências de **AC**.

- Note que todo conjunto finito pode ser bem ordenado trivialmente (por quê?), assim o que temos que verificar é que todo conjunto *infinito* pode ser bem ordenado.
- Seja então X um conjunto infinito.
- Note que, pelo Exercício 3, é suficiente mostrar que vale

$$X \oplus H(X) \approx X \times H(X)$$

– certo?

- Porém, temos por hipótese que

$$X \oplus H(X) \approx (X \oplus H(X))^2$$

– certo?

- Aplicando o Exercício 1 com sabedoria, você agora pode afirmar que

$$X \times H(X) \leqslant X \oplus H(X)$$

– certo?

- No entanto, o Exercício 0 nos garante que

$$X \oplus H(X) \leqslant X \times H(X)$$

– certo?

- Com isso, você pode concluir (com uma última participação do nosso querido “Teorema de São Bernardo do Campo”...) que, dado o Exercício 3, o seu conjunto infinito X pode ser bem ordenado – o que conclui a demonstração do Teorema de Tarski.

Conclusão

Os autores se colocam à disposição dos leitores para dirimir quaisquer dúvidas que permaneçam após a leitura deste artigo, bem como em quaisquer questões outras que sejam relacionadas à Teoria dos Conjuntos.

Encerramos este artigo agradecendo aos colegas da Revista de Matemática Hipátia pela oportunidade (em particular, ao(à) anônimo(a) revisor(a), pela leitura cuidadosa do manuscrito), aos leitores por terem investido o seu tempo em nosso trabalho, e convidando todos a estudar essa belíssima disciplina que é

a Teoria dos Conjuntos – lembrando que no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal da Bahia temos um Grupo de Pesquisa em Lógica do qual a Teoria dos Conjuntos é uma das linhas de investigação ativas, ou seja, não é necessário (e nem verdadeiro) pensar que a Teoria dos Conjuntos “pertence ao Museu da História da Matemática”, mas sim que é uma área de pesquisa viva e muito apaixonante.

Bibliografia

- [1] Caicedo, A., 580 - *Some choiceless results* (3). Teaching blog. Updated Tuesday, January 27th, 2009. <https://andrescaicedo.wordpress.com/2009/01/27/580-some-choiceless-results-3/>
- [2] Engelking, R., *General topology*, Second edition. Sigma Series in Pure Mathematics **6**, Heldermann Verlag, Berlin, 1989, viii+529 pp.
- [3] Jech, T., *The axiom of choice*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol.75, North-Holland, Amsterdam, 1973, xi+202p.
- [4] Jech, T., *Set theory –The third millennium edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003, xiv+769 pp.
- [5] de Jesus, J. P. C., e da Silva, S. G. (2007) *Cem Anos do Axioma da Escolha: Boa Ordenação, Lema de Zorn e o Teorema de Tychonoff*. Revista Matemática Universitária (RMU/SBM), 42, 16—34.
- [6] Kunen, K., *Set theory – An introduction to independence proofs*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983, xvi+313 pp.
- [7] Lévy, A., *Basic Set Theory*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979, xiv+391 pp.
- [8] Sierpinski, W. *L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix*. Fundamenta Mathematicae 34.1 (1947): pp. 1-5
- [9] Specker, E., *Verallgemeinerte Kontinuumshypothese und Auswahlaxiom*. Archiv der Mathematik 5 (1954), 332-337
- [10] Tarski, A., *Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix*. Fundamenta Mathematicae 5.1 (1924): pp 147–154.

- [11] Zermelo, E. *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)*, Math. Ann. **59** (1904), 514-516; translated in: Van Heijenoort, 139-141.
- [12] Zermelo, E. *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*. Math. Ann. **65** (1908), 107-128; translated in: Van Heijenoort, 183-198.
- [13] Zermelo, E. *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I*. Math. Ann. **65** (1908), 261-281; translated in: Van Heijenoort, 199-215.



Samuel Gomes da Silva nasceu e cresceu em Pirituba (periferia de São Paulo), participou do movimento estudantil secundarista logo após o final do regime militar e teve formação em Matemática no IME/USP (licenciatura noturno na graduação, depois mestrado e doutorado, tendo concluído o doutoramento em 2004). Atualmente é professor titular no Departamento de Matemática da UFBA, onde ingressou em 2006. Antes de concluir sua graduação foi monitor de matemática na Estação Ciência (museu paulista de ciências, ligado à USP, atualmente fechado) e antes de concluir seu mestrado foi professor na rede pública do Estado de São Paulo, com destaque para o período em que lecionou no CEFAM Experimental da Lapa. Feliz proprietário de um Gol 90 branco quadrado. Lógico, topólogo e teorista de conjuntos. Pós-doutorados em Morelia, México (onde conheceu sua esposa Consuelo) e em Barcelona, Catalunha. Hoje se considera paulista, baiano, mexicano e catalão, não necessariamente nessa ordem (mas num quadrangular entre Corinthians, Bahia, Pumas e Barcelona, ainda torceria para o Corinthians). Membro de várias diretorias da Sociedade Brasileira de Lógica desde 2011, sendo atualmente 2o. Vice Presidente. Foi coordenador da Comissão Organizadora do XX Encontro Brasileiro de Lógica, realizado em Salvador em 2022.



Nascido na seca cidade de Caculé, no sertão da Bahia, Diego Lima Bomfim peregrinou por considerável parte do Estado: fez o ensino médio e técnico na fria Vitória da Conquista, formou-se em Matemática na calorosa São Salvador — onde também concluiu o mestrado e iniciou o doutorado — e é, desde 2024, professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA), na chuvosa cidade de Valença. Medalhista da OBMEP na juventude, tornou-se pai no mesmo ano em que assumiu o cargo de professor e agora se divide entre equações e as traquinagens de Vinicius, um menino sapeca, curioso, cheio de energia e imaginação — típico de um episódio de *Os Anjinhos*. Flamengoista de coração e fã de esportes em geral, acredita que a matemática, assim como o futebol, é melhor quando compartilhada.

MEMÓRIA

A Matemática na Minha Vida

José Fernandes Silva Andrade

Apresentação

Neste artigo, quero apresentar um pouco da minha trajetória na área de Matemática. Como professor da UFBA, desempenhei atividades de ensino, pesquisa, extensão e administração, cada uma delas mais intensa em períodos diferentes, por razões que incluem a própria evolução histórica do Instituto de Matemática, atual Instituto de Matemática e Estatística. Estas ponderações justificam dividir este artigo em períodos cronológicos.

Formação acadêmica

1952–1970

Nasci em 23 de abril de 1952, em Salvador e, desde minha infância, sempre gostei e tive muita facilidade para Matemática. Fiz o curso secundário na escola pública: o ginásio foi cursado no Colégio Estadual João Florêncio Gomes, de 1964 a 1967, e o científico no Colégio Central da Bahia, de 1968 a 1970. Além do curso regular, estudei também francês e inglês na Casa da França e no ACBEU, respectivamente.

Um ano antes de entrar na Universidade, sem conhecer direito as perspectivas que teria ao fazer o Curso de Matemática, através de meu pai, tive uma conversa excelente com a Profa. Martha Dantas, professora de Matemática da Faculdade de Educação, que além de me incentivar a fazer o Bacharelado em Matemática, me falou da possibilidade de fazer cursos de pós-graduação, mestrado e doutorado, e das perspectivas que eu teria ao estudar em centros mais avançados.



Figura 1: Prof. José Fernandes

1971–1974 (UFBA)

Ingressei na Universidade Federal da Bahia, no princípio de 1971. Sabia que não seria um curso terminal, e que teria de me preparar bem para as etapas seguintes que me aguardavam. Logo no segundo semestre de 1971, fui aluno da Profa. Ana Maria Costa, que me falou da possibilidade de obter uma bolsa de iniciação científica do CNPq, e me apresentou ao Prof. Omar Catunda. Fiz o pedido e, em abril de 1972, obtive a resposta positiva da bolsa, sob a orientação do Prof. Catunda, e deixei de ensinar no Colégio dos Servidores Públicos, atividade que havia iniciado um ano antes, pouco depois de ingressar na UFBA. Era mais do que eu esperava para aquela época, desenvolvendo outras atividades no Instituto de Matemática, além do curso regular. No segundo semestre de 1972, como parte de minhas atividades na iniciação cientí-

fica, tive a oportunidade de dar aulas de exercícios de Cálculo I, sob a orientação da Profa. Nina Rosa Braga, que estava concluindo seu mestrado na UFBA.

Quando entrei na UFBA em 1971, o Curso de Mestrado em Matemática já estava implantado e para lecionar suas disciplinas e orientar as dissertações foram contratados vários professores com doutorado como professores visitantes, a maioria estrangeiros. Eles atuavam também na graduação. O Corpo Docente do Departamento contava ainda com o Prof. Omar Catunda, com vários professores que já tinham obtido o grau de mestre na UFBA ou em outros centros ou que faziam o curso de mestrado. Sem querer citar nomes, não posso deixar de mencionar aqueles que mais me influenciaram nessa época: Omar Catunda, Célia Gomes, Arlete Cerqueira Lima, Maria Helena Lanat, Nina Rosa Braga e Ana Maria Costa.

Em julho de 1973, fui ao 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, em Poços de Caldas. Esse Colóquio teve a duração de três semanas e havia prova nos cursos elementares. A Profa. Célia Gomes, que acompanhou as minhas atividades de iniciação científica, bem como a dos outros colegas bolsistas em 1973 e 1974, me aconselhou a me matricular nas duas disciplinas nas quais eu já tinha algum conhecimento e me disse que o mais importante para mim seria viver aquele ambiente. Conversando com professores e colegas de outros centros do país, ao contrário do que eu pensava, senti que o Curso de Matemática da UFBA era muito bom e estava no mesmo nível dos cursos das universidades do centro-sul do Brasil.

Naquela época havia dois Departamentos de Matemática no Instituto de Matemática: o Departamento de Matemática Geral, com maior número de professores, responsável pelas disciplinas que serviam aos diversos cursos da área de Ciências Exatas, e o Departamento de Matemática Pura, com um número reduzido de professores, encarregado apenas das disciplinas específicas do Curso de Matemática, algumas delas também optativas para outros cursos, principalmente o de Física. Como aluno, fui representante dos estudantes junto ao Departamento de Matemática Pura pelo período de um ano e tive então os primeiros contatos com a parte administrativa da UFBA. Durante o período em que estava fazendo pós-graduação, os dois departamentos se fundiram passando a se chamar Departamento de Matemática.

Em julho de 1974, com o incentivo da Profa. Célia Gomes, decidi que deveria tentar fazer o Curso de Mestrado no IMPA. Na ocasião, namorava com minha colega Ednalva Vergasta, que eu conhecia desde 1963, quando fomos colegas no último ano do curso primário

na Escola Castro Alves, situada próximo ao Largo dos Mares. Depois fomos colegas no Ginásio João Florêncio Gomes e entramos juntos na UFBA. Ela também tinha bolsa de iniciação científica e estava concluindo o Bacharelado em Matemática. Propus a ela nos casarmos em dezembro e em janeiro começarmos o Curso de Mestrado no IMPA. Ela aceitou e, no final de 1974, obtivemos o grau de Bacharel em Matemática e fomos aceitos para o Mestrado do IMPA. Com duas bolsas, pudemos alugar um apartamento de quarto e sala no Rio e criar um ambiente propício ao estudo, dividindo também as tarefas domésticas. Isso foi fundamental para atingirmos nossos propósitos no IMPA.

1975–1979

Em 1975, no meu primeiro ano do Curso de Mestrado no IMPA, tive bolsa da CAPES. Ao seu final notei a maturidade que eu adquiri nesse período para resolver problemas teóricos de Matemática. Isso foi muito importante na minha atuação como professor: a resolução de exercícios é fundamental para o crescimento dos alunos. No ano seguinte, deixei de receber a bolsa porque fui contratado como Assistente de Pesquisa no IMPA. O trabalho como Assistente de Pesquisa me deu a oportunidade de auxiliar os professores em suas atividades de ensino, incluindo ministrar aulas de exercícios.

Para a obtenção do mestrado no IMPA naquela época, em vez de escrever a dissertação de mestrado, era preciso submeter-se a um exame de mestrado, cujo programa era coberto pelo conteúdo de dez disciplinas, embora os créditos exigidos para o Mestrado fossem os de oito quaisquer disciplinas. Minha programação inicial foi fazer o exame de mestrado no final do primeiro semestre de 1977. No final de 1976, concluiria os créditos exigidos faltando fazer as disciplinas Variáveis Complexas e Formas Diferenciais. Mesmo sem me matricular, eu tinha assistido as aulas de Variáveis Complexas no verão de 1976 e, na UFBA, tinha sido aluno do Prof. Omar Catunda nesta matéria. Ele havia lecionado a maior parte do programa do mestrado. O meu orientador, Prof. Carlos Isnard, e o Prof. Manfredo do Carmo me incentivaram a fazer o exame de mestrado em janeiro de 1977. Concluí assim o mestrado, estudando sozinho em dezembro a disciplina Formas Diferenciais, cujo programa não era grande. Algumas dúvidas que tive ao estudar essa disciplina sozinho foram tiradas gentil e eficientemente pelo Prof. Alcides Neto. O esforço extra despendido foi altamente compensado com a conclusão do mestrado.

Assim, em janeiro de 1977 já estava fazendo a primeira disciplina do doutorado, mas faltando ainda definir minha área. Depois de conversar com o Prof. Manfredo do Carmo, decidi por Álgebra, com a qual mais me identificava. Falei com o Prof. Aron Simis para me orientar e ele aceitou. Já tinha tido um contato positivo com ele ao chegar ao IMPA em 1975.

Em março, o Prof. Aron Simis me deu para eu ler um artigo de D. Lazard que tinha acabado de ser publicado. O artigo tratava de sequências regulares em ideais gerados por determinantes de uma matriz retangular com mais colunas do que linhas. Lazard obteve os resultados sem exibir tais sequências e perguntava se seria possível exibi-las. Ao terminar de estudar esse artigo, comecei a pensar no problema proposto nele. Com a orientação do Prof. Aron, me dediquei no caso mais simples, o da matriz com duas linhas e quatro colunas. No final de junho, já tinha resolvido o problema para essas matrizes e, até o final de agosto, para uma matriz qualquer com duas linhas.

No segundo semestre desse ano, 1977, apresentei no Seminário de Álgebra do IMPA os resultados que havia obtido. Após a minha apresentação, o Prof. Karl-Otto Stöhr, que estava assistindo a convite do Prof. Aron, me chamou a atenção para o fato de eu estar utilizando um caso particular das relações de Grassmann, que ainda eram desconhecidas para mim, e em seguida me disse como eram estas relações no caso geral. Esta informação me levou a resolver o problema no caso das matrizes com duas colunas a mais do que linhas e em outros casos particulares específicos. No final desse ano, primeiro ano do doutorado, já tinha concluído a questão matemática envolvida na parte principal de minha tese.

No primeiro semestre de 1978 fiz o exame de qualificação. O Prof. Aron me mostrou uma questão em assunto relacionado com a tese. Os resultados obtidos nesse segundo problema não foram incluídos nela. Em julho apresentei o meu trabalho durante a V Escola de Álgebra, que foi realizada no IMPA. Depois da apresentação, o Prof. Wolmer Vasconcelos me disse que havia gostado dos resultados obtidos e conversamos sobre a possibilidade de incluir um novo tópico na tese. Eu já havia pensado nele e com o incentivo do Prof. Vasconcelos, em poucos dias escrevi o último capítulo dela.

Naquela altura, principalmente depois da conversa com o Prof. Vasconcelos, tinha plena consciência de que a tese estava praticamente concluída. Escrevi a primeira versão, e entreguei-a ao Prof. Aron. Quando fui para o IMPA, tinha como objetivo retor-

nar à UFBA, após a conclusão do doutorado. Entrei em contato com professores dessa Universidade informando do estado adiantado de minha tese, e terminei por receber uma proposta de contrato de Professor Visitante, a partir de 1º de novembro. Além disso, Ednalva, que já havia concluído o Curso de Mestrado poderia participar da seleção para Auxiliar de Ensino (depois Professor Auxiliar), que seria realizado no começo de novembro. Pedi demissão do meu cargo de Assistente de Pesquisa e assumi o posto na UFBA, tendo sido liberado para continuar no IMPA para a conclusão do doutorado. Em janeiro e até meados de fevereiro do ano seguinte, enquanto escrevia a versão final da tese, ministrei a disciplina Introdução à Álgebra, para os alunos que estavam iniciando o mestrado na UFBA. Em seguida, voltei ao Rio para acompanhar o trabalho de datilografia de minha tese e me preparar para sua defesa, que foi realizada no dia 16 de março de 1979, pouco mais de dois anos após o início do doutorado.

Professor da UFBA

1979–1982

Retornei do IMPA em meados de março de 1979, logo após o doutorado, para atuar como professor visitante do Departamento de Matemática da UFBA, principalmente no Curso de Mestrado. Os professores visitantes, por não terem vínculo permanente com a UFBA, não podiam integrar os Colegiados de Curso, mas no nosso caso, todos eram chamados para as reuniões do Colegiado e as decisões eram sempre tomadas por consenso. Eles lecionavam uma disciplina em cada semestre letivo para poder orientar as dissertações de mestrado e desenvolver atividades de pesquisa. Eu lecionei disciplinas no mestrado ou graduação e participei de algumas bancas de dissertações de mestrado.

Este foi um período de intensa atividade em pesquisa para mim. Era natural trabalhar em pesquisa em colaboração com Aron. Ainda neste ano, concluí junto com ele um artigo com os resultados que obtive enquanto fazia o doutorado e que não foram incluídos na tese.

Em julho de 1979, participei do 12º Colóquio Brasileiro de Matemática. Lá ficou decidido que a próxima Escola de Álgebra seria realizada na UFPE, em julho de 1980. Israel Vainsencher foi escolhido para coordená-la e Gervásio Bastos, da UFC, e eu integraríamos a Comissão Organizadora. Já conhecia os dois: Israel fez parte da comissão julgadora da minha

tese de doutorado e Gervásio fez um pós-doutorado de um ano no IMPA enquanto eu fazia o doutorado e fomos colegas em uma disciplina.

Pouco depois, foi aberto concurso na UFBA para Professor Adjunto na matéria Álgebra. Um dos requisitos na época era escrever um trabalho original na matéria do concurso. Obtive resultados originais em um assunto que era uma continuação natural de um dos capítulos de minha tese de doutorado. Fui aprovado neste concurso em julho de 1980.

Para tratar da organização da VI Escola de Álgebra, visitei a UFPE em novembro de 1979, quando foram definidas as diretrizes a serem seguidas. As decisões posteriores foram tomadas por Israel Vainsencher, algumas delas depois de consulta telefônica. Lá, fiz uma primeira apresentação dos últimos resultados obtidos para a minha tese do concurso. Após o retorno da UFPE, solicitei bolsa de pesquisa ao CNPq. Obtive esta bolsa por cinco períodos de dois anos cada: o primeiro no nível II-C e os demais no nível II-A.

No começo de 1980, transformei os resultados principais obtidos na minha tese de doutorado em artigo, o qual foi publicado na mesma revista onde havia sido publicado o trabalho de D. Lazard que lhe dera origem. A tese do concurso também foi transformada em artigo publicado no Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática. Trabalhei ainda em outro artigo em conjunto com Aron Simis e Wolmer Vasconcelos, o qual também foi publicado.

No segundo semestre de 1980, Aron me propôs escrevermos um livro sobre Álgebra Comutativa como texto para um curso no 13º Colóquio Brasileiro de Matemática. Como o projeto foi aceito pela organização do Colóquio, passei todo o verão de 1981 no IMPA, trabalhando no livro com Aron. Eu fiquei responsável por ministrar as aulas durante o Colóquio. Por coincidência, todos os quatro artigos que havia escrito até então, sozinho ou em colaboração, e mais o livro do Colóquio foram publicados em 1981.

Em 1981, comecei a orientação de duas dissertações de mestrado, as quais foram defendidas no primeiro semestre de 1983.

Durante o Colóquio de 1981 fui convidado a ministrar o Curso de Álgebra no verão seguinte na UFPE. Foi uma experiência muito boa e, além de ministrar o Curso, participei de uma banca de Dissertação de Mestrado. Foi também um período de agradável convívio familiar. Viajei de carro com Ednalva e nossa filha Cecília que tinha um ano de idade e aluguei um apartamento simples, mas muito bem localizado na praia da Boa Viagem, em frente ao mar. Pela manhã,

enquanto estava na Universidade, elas iam à praia; à tarde, passeávamos juntos e, à noite, eu preparava a aula do dia seguinte.

Nesse período participei como conferencista de uma Reunião Regional da SBM, realizada em São Luís e de duas reuniões promovidas pela SBM e realizadas no IMPA, com um representante de cada uma das principais universidades do país para se estabelecer quais as principais disciplinas que os cursos de graduação em matemática deveriam ter para que esse curso fosse considerado bom pela SBM. Todas as disciplinas que foram incluídas nesta lista já constavam da grade curricular do curso da UFBA no tempo da minha graduação.

Essa movimentação toda, participando de reuniões e visitando outros centros me fizeram entender como funcionavam os cursos de mestrado do país, principalmente no tocante às dissertações de mestrado, experiência que não tive enquanto estudante. Além disso, passei a conhecer e ser conhecido por outros professores de outras universidades. Esse aprendizado foi muito importante para a minha atuação na UFBA.

1982–1992

Desde que assumi como Professor Adjunto, aos poucos, minha participação dentro do Instituto de Matemática foi aumentando. Participei de uma banca de Concurso para Professor Auxiliar. Submeti ao CNPq vários projetos para melhoria da Biblioteca do Instituto e para a vinda de professores para conferências e julgamento de dissertações de mestrado. Em maio de 1981, passei a fazer parte do Colegiado do Curso de Mestrado e assumi a sua coordenação em agosto de 1982. Desde que o Prof. Catunda se aposentou, em 1976, o Curso de Mestrado vinha sendo coordenado por professores que não tinham o doutorado, embora no seu corpo docente houvesse alguns doutores, que eram responsáveis por toda parte acadêmica do Curso. Naquela época, não tinha vontade de me envolver com a parte administrativa, mas senti a necessidade de assumir este cargo e isto foi bom para o Curso de Mestrado. Com a minha atuação na sua coordenação, o Curso passou a ter apoio da CAPES, inclusive com bolsas de estudo. Passamos, a partir da minha gestão como Coordenador do Curso de Mestrado, a ter sempre um professor de outros cursos de mestrado nas bancas das dissertações. Até então, na grande maioria das vezes, as bancas daqui eram compostas somente por professores do nosso Curso.

Passei a orientar alguns alunos de iniciação científica. Alguns deles concluíram o doutorado e se estabeleceram como professores da UFBA. Na parte de pesquisa, conclui mais dois artigos com Aron Simis. Um em 1984 e outro em 1989 os quais foram publicados em revistas no exterior. Obtive ainda alguns outros pequenos resultados que não geraram artigos. Visitei ainda algumas instituições brasileiras, realizando atividades, tais como minicursos, palestras, atuação como membro de banca de concurso ou de dissertação de mestrado e participando de reuniões científicas: IMPA, UFMG, UFC, UFPE, UFPB, UEFS.

Em 1985, ficou pronta a terceira Dissertação de Mestrado que orientei. Nesta época, o Curso de Mestrado estava com dificuldade de conseguir bons alunos. Apesar de dois dos professores visitantes estrangeiros terem se estabelecido na UFBA, o número de doutores no Corpo Docente do Curso ainda era bem pequeno e, em função disto, éramos levados a incentivar os nossos melhores alunos a fazer o mestrado fora. Já vinha trabalhando na iniciação científica e resolvi intensificar este trabalho. Para 1987, obtive do CNPq oito bolsas desta modalidade e, nesta tarefa, fui auxiliado por outros colegas do Departamento de Matemática.

Em agosto de 1986, após dois mandatos deixei a coordenação do mestrado, mas continuei como Vice-Coordenador, ficando neste cargo até maio de 1989. Nessa ocasião, o Corpo Docente do Curso de Mestrado havia ganho três novos professores com doutorado: os professores Marco Antônio Fernandes, Enaldo Vergasta e Aron Simis que havia se transferido da UFPE para a UFBA. O então coordenador, Prof. Benedito Ikeda, e eu deixamos respectivamente os cargos de Coordenador e Vice para propiciar uma nova eleição e o Prof. Aron Simis poder assumir como coordenador. Como fruto do intenso trabalho de iniciação científica desenvolvido por vários professores do Departamento de Matemática, o corpo discente do mestrado tinha começado a melhorar e a ampliar.

Também com a chegada desses três professores pude diminuir minha atuação no mestrado e aumentá-la no curso de graduação. Estava iniciando uma nova fase da minha carreira como professor do Departamento de Matemática da UFBA. Em 1992, passei a fazer parte do Colegiado do Curso de Graduação em Matemática.

No começo de 1988, a Congregação do Instituto de Matemática me elegeu para representar o Instituto no Conselho de Coordenação da Universidade, atual CONSEPE. Como fui reconduzido, minha presença neste Conselho foi de quatro anos. Todos os re-

presentantes do Instituto neste Conselho tiveram assento na Câmara de Pós-Graduação. Foi uma experiência bastante enriquecedora, pois passei a entender melhor o funcionamento da Universidade e passei a participar de suas decisões acadêmicas, defendendo ideias que beneficiavam o Curso de Mestrado em Matemática.

1993–2003

Foi um período com muitas funções administrativas. Em julho de 1993, voltei a assumir a Coordenação do Colegiado do Curso de Mestrado e fui seu coordenador por mais quatro anos. Diferente de 1982, desta vez eu assumi o cargo não por uma necessidade imperiosa, mas motivado pela perspectiva de um salto qualitativo no Curso. Além da experiência adquirida como coordenador do curso e como membro do Conselho de Coordenação, teria a participação mais intensa dos novos colegas no Colegiado discutindo os problemas e ajudando a tomar decisões. Logo depois que assumi a coordenação, a CAPES aceitou com a possibilidade de fazermos um plano de recuperação para o Curso. Com este plano aprovado pela CAPES, o Curso passou a ter apoio financeiro e as bolsas de estudo, que estavam suspensas, voltaram gradativamente. Isto possibilitou que bons alunos oriundos da iniciação científica optassem por permanecer na UFBA, e conseqüentemente o nosso mestrado ganhou um novo impulso e foi se consolidando cada vez mais.

Em 1996, passei a fazer parte da Congregação do Instituto de Matemática. Naquela época, os coordenadores de colegiado e chefes de departamento não eram necessariamente membros da Congregação. Eu passei a fazer parte como representante dos Professores Adjuntos. Pouco tempo depois, fui escolhido pela Congregação para ser o substituto do Vice-Diretor. Cheguei a assumir a direção por períodos curtos de alguns dias, em função de viagens do Diretor, Prof. Adelmo de Jesus e da Vice-Diretora, Profa. Ilka Freire, chegando inclusive a participar de reuniões do Conselho Universitário. Ainda em 1996, com o final do mandato do Prof. Adelmo, a Profa. Ilka Freire se candidatou a Diretora do Instituto e eu como seu Vice. Fomos eleitos pela comunidade e assumimos os cargos neste mesmo ano.

Em dezembro de 1997, já tendo concluído o meu mandato como Coordenador do Curso de Mestrado, voltei a ser indicado como representante do Instituto no Conselho de Coordenação. Pedi para sair no final de 1998, após o final do primeiro ano do mandato, porque no começo de 1999, a Profa. Ilka Freire entrou

de férias e se aposentou em seguida. Então assumi interinamente a função de Diretor, já que o meu mandato de Vice-Diretor estava em curso e me candidatei ao cargo de Diretor, tendo assumido este mandato em junho.



Figura 2: O atual diretor e outros ex-diretores do IME: Célia Maria Pitangueira Gomes, Adelmo Ribeiro de Jesus, Ilka Rebouças Freire, José Fernandes Silva Andrade, Evandro Carlos Ferreira dos Santos e Kleyber Mota da Cunha.

Na parte acadêmica, fiz concurso para Professor Titular em agosto de 1999, do qual constaram Prova de Títulos, Defesa de Memorial e Conferência na área do concurso. No começo do ano seguinte, assumi como Professor Titular. Durante todo o período em que fui diretor, apesar de não ter obrigação, sempre lecionei uma disciplina, todas no primeiro horário da manhã, para que as tarefas da direção não prejudicassem as minhas aulas. É importante mencionar que dar aula sempre foi o que mais gostei de fazer durante todo o meu tempo de professor. Orientei mais dois alunos em suas Dissertações de Mestrado, tendo um deles concluído o seu trabalho em 1998, e o outro em 1999. A orientação na iniciação científica continuou ininterruptamente, com pelo menos dois alunos em cada ano.

Em 1998, participei pela primeira vez de uma atividade de extensão, ministrando aulas para professores da UNEB, na cidade de Senhor do Bonfim. No ano seguinte, no projeto Pró-Ciências no Instituto de Matemática, ministrei um curso sobre Análise Combinatória. Ele foi repetido em 2000 e 2001. Nessa época, já tinha sido criado o LEMA, com modelos concretos, principalmente na área de Geometria e um pouco na de Álgebra Elementar. Como eu ministrava as aulas de Análise Combinatória sempre fazendo desenhos ou modelos no quadro para que essa visualização tor-

nassem mais fácil a compreensão e solução dos problemas pelos alunos, propus à Profa. Elinalva Vasconcelos, Coordenadora do LEMA na época, a construção de modelos concretos que ajudassem os alunos na solução dos problemas de Análise Combinatória. Dessa maneira, o LEMA ganhou os primeiros modelos nesta área. Eles foram construídos pela artista Fabiana Laranjeiras. Daí até a minha aposentadoria, participei de vários projetos de extensão.

Na época em que estava na direção do Instituto, resolvi escrever um artigo para ser submetido para publicação na revista Matemática Universitária da SBM, contendo alguns contraexemplos simples em espaços vetoriais de dimensão infinita, de resultados válidos nos espaços vetoriais de dimensão finita. Eu já tinha elaborado esses contraexemplos em 1990, quando ensinei pela primeira vez a disciplina Álgebra Linear II da graduação, mas nunca tinha escrito de uma forma que pudesse ser publicado. O artigo foi aceito e publicado no volume 37 do ano de 2004.

Em setembro de 2000, como membro do Conselho Universitário da UFBA, fui indicado para ser um dos três representantes deste Conselho no Conselho de Curadores, tendo sido um dos seus membros até o final do meu mandato de Diretor, quando também se encerrou minha participação no Conselho Universitário e, conseqüentemente, também no Conselho de Curadores. Participei então dos três Conselhos da Universidade que havia no meu tempo de professor: Conselho de Coordenação, depois CONSEPE, Conselho Universitário e Conselho de Curadores.

2003–2011

Foi durante o tempo em que fui Diretor do Instituto que começaram regularmente na UFBA os concursos para a classe de Professor Adjunto, que exige para entrada o grau de Doutor. Com isso, o Corpo Docente do Curso de Mestrado foi aumentando. Conseqüentemente, mudaram um pouco as minhas atividades no Departamento de Matemática. Continuei lecionando duas disciplinas a cada semestre, sendo a última no Curso de Mestrado em 2007. A partir daí, só lecionei disciplinas na graduação, sempre disciplinas específicas do Curso de Matemática. É interessante observar que todas as disciplinas que lecionei nesse período foram da área de Álgebra ou Variáveis Complexas ou Análise Combinatória, todas relacionadas com o meu doutorado: a área de Álgebra foi a área do doutorado, Variáveis Complexas a segunda área do exame de qualificação, e utilizei fortemente Análise Combinatória no último capítulo da tese. Usei também Combinatória na demonstração de alguns teo-

remas em trabalhos que publiquei, entre eles um artigo de pesquisa com Aron Simis. Não posso deixar de mencionar aqui que, depois que entrei na universidade como aluno em 1971, o único curso que fiz sobre o assunto de Análise Combinatória foi na minha graduação: a disciplina Estatística III-C, lecionada pela Profa. Margot Piva, excelente professora do Departamento de Estatística.

As orientações de iniciação científica foram até 2005. Recebi nesse ano uma homenagem da UFBA pela minha participação destacada nos Seminários Estudantis de Pesquisa da UFBA que estava completando 25 anos. Também fui Professor Homenageado ou Patrono em cinco solenidades de formatura do Curso de Graduação em Matemática.

No final de 2004, fui indicado para mais um mandato no CONSEPE, sendo reconduzido na representação para um segundo período, participando desse Conselho de janeiro de 2005 a dezembro de 2008.

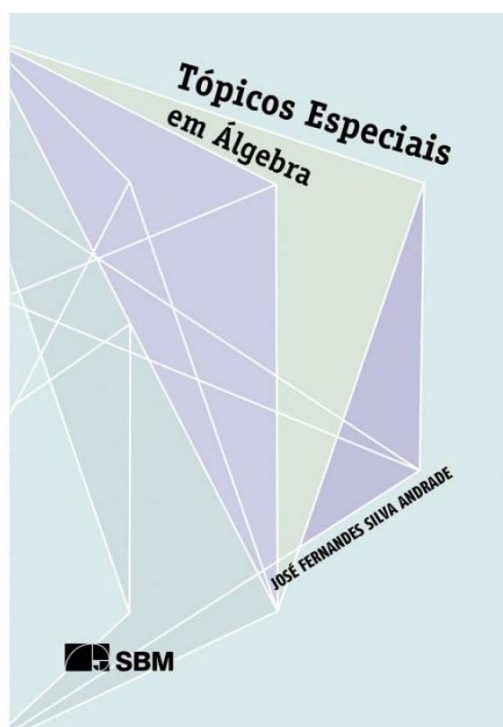


Figura 3: “O livro de José Andrade facilita o ensino e a aprendizagem em disciplinas de álgebra. Os resultados expostos são baseados em sua experiência na graduação, em atividades de iniciação científica e no mestrado. Portanto, os alunos podem aprofundar seus estudos em tópicos como anéis de ideais principais, anéis de inteiros quadráticos, além de domínios euclidianos, unicidade no algoritmo da divisão, soma de quatro quadrados, triângulos retângulos com lados inteiros e o último teorema de Fermat.” (resumo extraído do *site* da SBM.)

Apresentei um projeto que foi aprovado pelo Departamento para escrever uma série de artigos sobre assuntos que complementam tópicos das diversas disciplinas do Curso de Graduação em Matemática na Área de Álgebra. Os dois primeiros, Triângulos Retângulos com Lados Inteiros: Procurando as Hipotenusas e Anéis Quadráticos Euclidianos foram publicados na revista Matemática Universitária nos volumes 41 e 48/49 dos anos de 2006 e 2010, respectivamente. Depois, resolvi escrever um livro sobre esse tema no qual inclui todo o material publicado nos três artigos que escrevi para a Matemática Universitária. Quando me aposentei em 2011, o livro não estava ainda todo escrito, mas continuei com o projeto. O livro Tópicos Especiais em Álgebra ficou pronto e foi publicado pela SBM, na Coleção Iniciação Científica, no começo de 2014. São doze capítulos com tópicos independentes. Dediquei-o à minha esposa Profa. Ednalva Andrade, colega, amiga, parceira, que contribuiu muito para a minha carreira e a quem presto mais uma homenagem nestas notas. Fiz seu lançamento no auditório do Instituto de Matemática. O ponto mais importante foi a apresentação que fiz no auditório: convidei professores, ex-professores, alunos, ex-alunos, amigos e familiares. Disse a todos que falaria para os meus amigos não matemáticos. Fiquei muito feliz com o evento. De todos os meus trabalhos publicados, esse foi um dos que mais gostei de ter escrito, só perdendo para a minha tese de doutorado.



José Fernandes nasceu em Salvador, obteve o doutorado em Álgebra no IMPA e é professor aposentado da UFBA, onde também se graduou. Além da matemática, uma das coisas que gosta de fazer é passear e tomar sorvete na Ribeira, onde morou até um ano antes de completar a graduação.

PROBLEMA

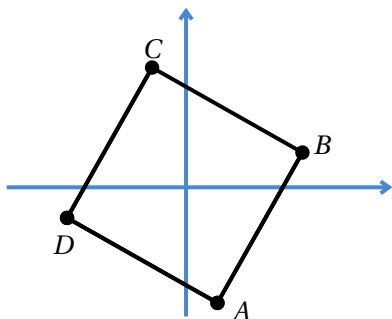
Contando Inversões

Yure Carneiro e Samuel Feitosa

Soluções da Edição Anterior

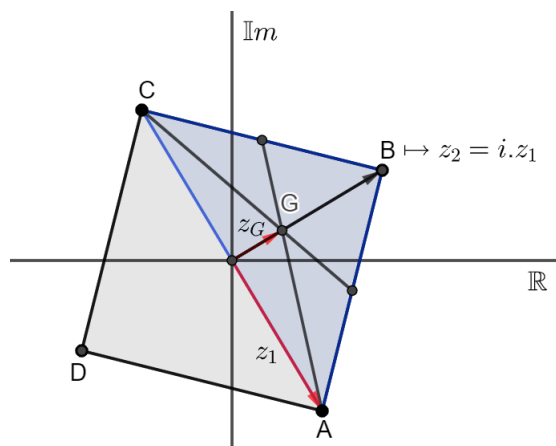
Problemas Universitários

Problema 1. No plano complexo (plano de Argand-Gauss) um quadrado $ABCD$ tem centro no ponto $z = 0$.



Se o vértice A encontra-se no afixo do número complexo z_1 , determine o número complexo que representa o baricentro do triângulo ABC .

Solução. Observe a figura a seguir. Se o vértice A é o afixo do número complexo z_1 , segue que o vértice B corresponde ao afixo do número complexo iz_1 . (O número complexo cujo afixo é o ponto B é obtido de z_1 por uma rotação de 90° no sentido anti-horário, o que é obtido por uma multiplicação por i).



Por fim, como o triângulo ABC é isósceles de base AC , segue que OB é uma das medianas do triângulo. Sendo G o baricentro do triângulo ABC , segue que $OG = \frac{1}{3}OB \Rightarrow z_G = \frac{1}{3}i \cdot z_1$ (onde z_G é o número complexo cujo afixo é o ponto G). Diante do exposto,

$$z_G = \frac{1}{3} \cdot z_1 = \frac{z_3}{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

Também recebemos uma solução correta de Yan Lima Machado

Problema 2. Qual o número de pares ordenados (a, b) de inteiros positivos a, b tais que as seguintes condições sejam simultaneamente satisfeitas?

(i) $a \mid 6000$;

$$(ii) \quad 1 \leq b \leq \frac{6000}{a};$$

$$(ii) \quad \text{mdc}(a, b, \frac{6000}{a}) = 1.$$

Solução. A função $f(n)$ que conta tais pares com n no lugar de 6000 é multiplicativa, ou seja, $f(mn) = f(m)f(n)$ se m, n são primos entre si. Daí é fácil ver que $f(n) = n \cdot \prod_{p|n} (1 + \frac{1}{p})$ com p primo.

Problema 3. Seja $r(x)$ o polinômio que é o resto na divisão de x^{2050} por $x^5 + x^2 + 1$. Quantos coeficientes ímpares possui $r(x)$?

Solução. Vamos trabalhar no anel de polinômios $\mathbb{F}_2[x]$, em que $\mathbb{F}_2$ é o corpo dos inteiros módulo 2. Neste anel, temos

$$x^5 \equiv x^2 + 1 \pmod{x^5 + x^2 + 1}$$

implica que

$$x^{10} \equiv (x^2 + 1)^2 \equiv x^4 + 1 \pmod{x^5 + x^2 + 1},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} x^{20} &\equiv (x^4 + 1)^2 \\ &\equiv x^8 + 1 \equiv x^3(x^2 + 1) + 1 \\ &\equiv x^2 + x^3 \pmod{x^5 + x^2 + 1} \end{aligned}$$

e portanto, módulo $x^5 + x^2 + 1$,

$$\begin{aligned} x^{30} &\equiv (x^2 + x^3) \cdot (x^4 + 1) \\ &\equiv x^7 + x^6 + x^3 + x^2 \\ &\equiv x^2(x^2 + 1) + x(x^2 + 1) + x^3 + x^2 \\ &\equiv x^4 + x \\ \implies x^{31} &\equiv x^5 + x^2 \\ &\equiv 1 \end{aligned}$$

(Uma maneira mais rápida de obter a última congruência seria perceber que $x^5 + x^2 + 1$ é irredutível em $\mathbb{F}_2[x]$, logo $\mathbb{F}_2[x]/(x^5 + x^2 + 1)$ é um corpo, extensão de $\mathbb{F}_2$ de grau 5, logo possui $2^5 = 32$ elementos e por Lagrange $a^{31} \equiv 1 \pmod{x^5 + x^2 + 1}$ se $a \not\equiv 0 \pmod{x^5 + x^2 + 1}$). Por fim, $x^{2046} \equiv (x^{31})^{66} \equiv 1 \implies x^{2050} \equiv x^4$. Assim, $r(x)$ é congruente a x^4 módulo 2 e possui apenas 1 coeficiente ímpar.

Problema 4. Considere Γ o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja razão entre a distância de P à origem e a distância entre P e a reta $y = -1$ é constante e igual a $\frac{1}{2}$. Qual a maior distância entre dois pontos de Γ ?

Solução. A descrição de tal lugar geométrico Γ é de uma cônica com excentricidade $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, ou seja, Γ é uma elipse. Além disso, um dos focos dessa elipse é a origem e a reta $y = -1$ é uma diretriz. Assim, o eixo focal (sendo perpendicular à diretriz) é vertical, paralelo ao eixo y . De onde, o eixo focal é o próprio eixo y . Assim, a maior distância entre dois pontos de Γ é exatamente o dobro do comprimento do semieixo maior, isto é, $2a$.

Para completar, sendo A o vértice da elipse que está entre o foco $F_1 = (0, 0)$ e a diretriz $r: y = -1$, temos

$$1 + \frac{d(A, r)}{d(A, F_1)} = \frac{d(A, F_1) + d(A, r)}{d(A, F_1)} = \frac{d(F_1, r)}{d(A, F_1)} = \frac{1}{d(A, F_1)}$$

e

$$a - c = d(A, F_1) = \frac{1}{1 + \frac{1}{e}} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}.$$

Também,

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{a}{2}.$$

Então, $a - \frac{a}{2} = \frac{1}{3}$ e $a = \frac{2}{3}$. De onde, a máxima distância procurada é $2a = \frac{4}{3}$.

Também recebemos uma solução correta de Yan Lima Machado

Problema 5. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar e diferenciável satisfazendo:

- $f(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- $f'(0) = -1$.

Mostre que $f(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Como $f(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $f'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$. De onde, $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Agora, se existisse a tal que $f'(a) > 0$ e como $f'(0) = -1$, teríamos

$$-1 = f'(0) < 0 < f'(a).$$

Então, pelo Teorema de Darboux (valor intermediário para a derivada), existiria b entre 0 e a tal que $f'(b) = 0$, o que contraria o que acabamos de descobrir acima. Portanto, $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e f é estritamente decrescente.

Assim, se $f(x) > -x$ para algum x , então $x = f(f(x)) < f(-x) = -f(x)$, isto é, $f(x) < -x$, sendo uma contradição. Analogamente, não pode ocorrer $f(x) < -x$. Portanto, $f(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 6. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Prove que $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$ se, e somente se, existe uma matriz invertível $X \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AXB = O_n$, onde O_n é a matriz nula de ordem n .

Solução. Queremos mostrar que

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n \Leftrightarrow \exists X \text{ invertível} : AXB = O_n$$

($\Leftarrow$): Supondo a existência de uma matriz invertível X satisfazendo $AXB = O_n$, pela desigualdade de Sylvester para o posto de matrizes, tem-se

$$0 = \text{rank}(O_n) = \text{rank}(AXB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(XB) - n$$

e

$$\begin{aligned} \text{rank}(XB) &\geq \text{rank}(B) + \text{rank}(X) - n \\ &= \text{rank}(B) + n - n = \text{rank}(B). \end{aligned}$$

Daí, $0 \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$, ou seja, $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$.

($\Rightarrow$): Estamos supondo agora que $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$. Existem matrizes inversíveis X_A, Y_A, X_B e Y_B tais que

$$Y_A \cdot A \cdot X_A = \begin{bmatrix} I_{\text{rank}(A)} & 0 \\ 0 & O_{n-\text{rank}(A)} \end{bmatrix}$$

e

$$X_B \cdot B \cdot Y_B = \begin{bmatrix} O_{n-\text{rank}(B)} & 0 \\ 0 & I_{\text{rank}(B)} \end{bmatrix}$$

onde $I_{\text{rank}(A)}$ e $I_{\text{rank}(B)}$ são matrizes identidades de ordens $\text{rank}(A)$ e $\text{rank}(B)$, respectivamente. E 0 ali representam matrizes nulas com as devidas ordens para preencherem as entradas restantes. Assim, multiplicando $Y_A \cdot A \cdot X_A$ e $X_B \cdot B \cdot Y_B$, obtemos

$$\begin{bmatrix} I_{\text{rank}(A)} & 0 \\ 0 & O_{n-\text{rank}(A)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} O_{n-\text{rank}(B)} & 0 \\ 0 & I_{\text{rank}(B)} \end{bmatrix} = O_n$$

essa última igualdade ocorre pois $n - \text{rank}(B) \geq \text{rank}(A)$ e $n - \text{rank}(A) \geq \text{rank}(B)$.

Portanto, tomando $X = X_A \cdot X_B$ (que é invertível), obtemos

$$AXB = Y_A^{-1} \cdot O_n \cdot Y_B^{-1} = O_n.$$

Problemas de Matemática Elementar

Problema 7. Nas Olimpíadas de Pirajuba, existem 6 competidores e 8 dias de evento. Os três primeiros competidores de cada dia do evento recebem uma medalha, que pode ser de ouro, prata e bronze. Não existem empates e uma medalha de cada tipo é dada a apenas um atleta em cada dia do evento. Cada competidor recebe 5 pontos por cada medalha de ouro, 3 pontos por cada medalha de prata e 1 ponto por cada medalha de bronze. Se Luciana, que é uma das competidoras, conseguiu um total de 27 pontos no final do evento, qual o número máximo de medalhas de prata que ela pode ter recebido?

Solução. Como são oito dias de evento, ela não pode ter ganho mais que 8 medalhas de prata. Veja que essa quantidade não satisfaz o enunciado, pois $8 \cdot 3 = 24 < 27$. Assim, ela obteve menos de 8 medalhas de prata. Vamos analisar os casos possíveis para determinar o número máximo de medalhas de prata que ela pode obter:

- Se ela tivesse obtido 7 medalhas de prata, teria que fazer $27 - 3 \cdot 7 = 6$ pontos em um dia de evento, mas isso não é possível.
- Se ela tivesse obtido 6 medalhas de prata, teria que fazer $27 - 3 \cdot 6 = 9$ pontos em dois dias de evento, mas isso não é possível pois $5 + 3 < 9 < 5 + 5$.
- Se ela tivesse obtido 5 medalhas de prata, teria que fazer $27 - 3 \cdot 5 = 12$ pontos em três dias de evento. Como $12 > 3 \cdot 3$, pelo menos uma medalha de ouro, valendo 5 pontos, teria que ser obtida. Por outro lado, não é possível combinar apenas duas parcelas de 1, 3 e 5 para obter os $12 - 5 = 7$ pontos restantes. Consequentemente, ela não pode ter obtido 5 medalhas de prata.

Para mostrar que 4 medalhas de prata é o máximo, basta exibirmos um exemplo. Após obter $3 \cdot 4 = 12$ pontos em 4 dias com medalhas de prata, ela precisaria ter obtido $27 - 3 \cdot 4 = 15$ pontos nos outros 4 dias. Luciana pode obter essa pontuação com 3 medalhas de ouro em 3 dias e 1 dia sem premiação.

Também recebemos uma solução correta de Yan Lima Machado

Problema 8. Um encontro de britânicos e italianos em uma cafeteria reuniu 55 pessoas. Cada uma dessas pessoas pediu café ou chá. Sabemos que os britânicos sempre contam a verdade quando bebem chá e mentem quando bebem café. Já os italianos se comportam de modo oposto. Um repórter realizou uma rápida pesquisa e descobriu os seguintes fatos:

- 44 pessoas responderam sim para a pergunta: Você está bebendo café?
- 33 pessoas responderam sim para a pergunta: Você é italiano?
- 22 pessoas concordaram com a afirmação: Está chovendo lá fora.

Quantos britânicos na cafeteria estavam tomando chá?

Solução. Qualquer pessoa que afirme estar bebendo café necessariamente precisa ser italiana. Portanto,

existem 44 italianos e 11 britânicos. Qualquer pessoa que afirme ser italiano tem que estar bebendo café. Portanto, havia 33 pessoas bebendo café. Seja n o número de britânicos bebendo café. Então existiam $11 - n$ britânicos bebendo chá, $33 - n$ italianos bebendo café e $44 - (33 - n) = 11 + n$ italianos bebendo chá. Se não estava chovendo no lado de fora, então $n + (11 + n) = 22$, mas n não é um inteiro nesse caso. Portanto, estava chovendo no exterior e $(11 - n) + (33 - n) = 22$, consequentemente, $n = 11$. Segue daí que 0 britânicos estavam bebendo chá.

Problema 9. Érica viajou para um país estrangeiro e sacou \$800 da moeda local em um banco. O caixa deu essa quantia usando notas de \$20, \$50 e \$100, usando pelo menos uma nota de cada tipo. De quantas maneiras diferentes ele pode ter feito esse pagamento para ela?

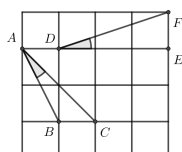
Solução. Se x , y e z são as quantias de notas de \$20, \$50 e \$100, respectivamente, portanto $2x + 5y + 10z = 80$. Como temos uma nota de cada tipo, podemos descontar uma 1 unidade de cada uma das incógnitas anteriores e reduzir a equação para $2a + 5b + 10c = 63$. Como 63 é ímpar, precisamos que b seja ímpar. Podemos analisar os casos. Quando $b = 1$, $2a + 10c = 58$. Daí $10c = 0, 10, 20, 30, 40$ ou 50, ou seja, temos 6 soluções. Quando $b = 3$, $2a + 10c = 48$ e daí $10c = 0, 10, 20, 30$ ou 40, ou seja, temos 5 soluções. Continuando essa contagem, para $b = 5, 7, 9$ e 11, teremos

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$$

soluções.

Também recebemos uma solução correta de Yan Lima Machado

Problema 10. Na malha a seguir, todos os quadradinhos possuem lados de mesma medida. Explique o porquê de os ângulos $\angle BAC$ e $\angle EDF$ possuírem a mesma medida.



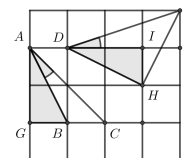
Solução. (Solução de Yan Lima Machado) Seja $BC =$

x . Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{5}x \\ AC &= \sqrt{8}x \\ DF &= \sqrt{10}x \end{aligned}$$

Ademais, considere $\angle BAC = \alpha$ e $\angle EDF = \beta$. Temos $\cos(\beta) = \frac{3x}{\sqrt{10}x} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ e, pela Lei dos Cossenos no triângulo ABC , $x^2 = 8x^2 + 5x^2 - 4\sqrt{10}x^2 \cos(\alpha)$, ou seja, $\cos(\alpha) = \frac{12x^2}{4\sqrt{10}x^2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Como $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ e $\cos \alpha = \cos \beta$, segue que $\alpha = \beta$.

Segunda Solução: Note que $DH = HF$, pois ambos são diagonais de um retângulo 2×1 e, além disso, $\angle IHF = \angle IDH$.



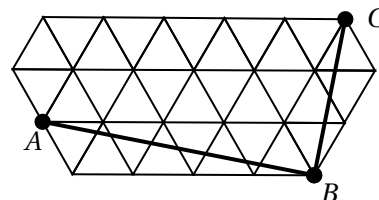
Portanto,

$$\angle DHF = \angle DHI + \angle IHF = \angle DHI + \angle HDI = 90^\circ.$$

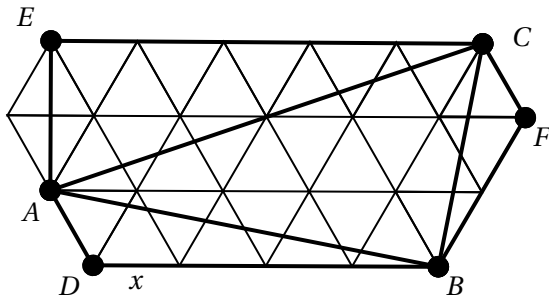
Assim, AGC e DHF são ambos triângulos retângulos isósceles. Como os triângulos AGB e DHI são congruentes, segue que

$$\angle BAC = 45^\circ - \angle BAG = 45^\circ - \angle HDI = \angle FDE.$$

Problema 11. Na figura a seguir, todos os triângulos são equiláteros e idênticos. Encontre a medida do ângulo $\angle ABC$.



Solução. (Solução de Yan Lima Machado) Considere a medida dos lados dos triângulos igual a x e sejam D , E , e F os vértices marcados na figura a seguir.



Como o triângulo AEC é retângulo em E , pois AE é mediatriz de um dos segmentos da malha, temos pelo Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AE^2 + EC^2 \\ &= 3x^2 + 25x^2 \\ &= 28x^2. \end{aligned}$$

Pela Lei dos Cossenos nos triângulos ADB e BCF , temos

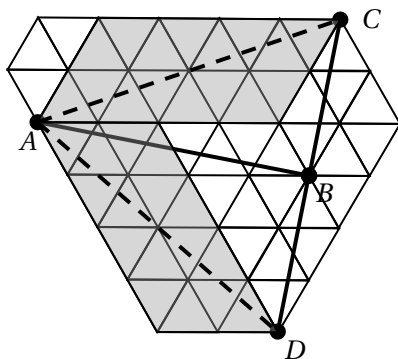
$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 - 2AD \cdot DB \cdot \cos 120^\circ + DB^2 \\ &= x^2 - 2 \cdot 4x^2 \left(-\frac{1}{2} \right) + 16x^2 \\ &= 21x^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} BC^2 &= CF^2 - 2CF \cdot FB \cdot \cos 120^\circ + FB^2 \\ &= x^2 - 2 \cdot 2x^2 \left(-\frac{1}{2} \right) + 4x^2 \\ &= 7x^2. \end{aligned}$$

Como $AC^2 = AB^2 + BC^2$, pela recíproca do Teorema de Pitágoras, temos que $\angle ABC = 90^\circ$

Segunda Solução: Continue o ladrilhamento com triângulos equiláteros como na figura anterior.



Note que o segmento CB é a diagonal de um paralelogramo formado por 4 triângulos do reticulado e, por

simetria, o seu prolongamento irá encontrar o vértice D de outro paralelogramo também formado por 4 triângulos do reticulado. Tanto AD quanto AC são diagonais de paralelogramos congruentes, que estão pintados de cinza no desenho, portanto, $AC = AD$. Assim, como B é o ponto médio de CD , o segmento AB é uma altura do triângulo isósceles ACD e daí $\angle ABC = 90^\circ$.

Problema 12. Prove que

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{12}$$

Solução. Se

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100},$$

temos

$$K > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{98}{99}.$$

Portanto, multiplicando a igualdade anterior por essa última desigualdade, obtemos:

$$K^2 > \frac{1}{200} > \frac{1}{225},$$

ou seja,

$$K > \frac{1}{15}.$$

Agora, para mostrar a outra desigualdade do problema, temos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{97}{98} \cdot \frac{99}{100} \\ &< \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{8}{9} \cdots \frac{98}{99} \cdot \frac{100}{101} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{98}{99} \cdot \frac{100}{101} \right) \end{aligned}$$

O último membro pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{101K} = \frac{175}{16 \cdot 16 \cdot 101K}$$

Daí,

$$K^2 < \frac{175}{16 \cdot 1616} < \frac{175}{16 \cdot 1575} = \frac{175}{16 \cdot 9 \cdot 175} = \frac{1}{144} = \frac{1}{12^2}$$

e, portanto, $K < \frac{1}{12}$. Logo,

$$\frac{1}{15} < K < \frac{1}{12}.$$

Problema 13. Avalie a soma simplificando ao máximo sua expressão

$$\frac{2}{0! + 1! + 2!} + \frac{3}{1! + 2! + 3!} + \cdots + \frac{2024}{2022! + 2023! + 2024!}.$$

Solução. Queremos simplificar ao máximo a expressão da soma

$$\frac{2}{0! + 1! + 2!} + \frac{3}{1! + 2! + 3!} + \cdots + \frac{2024}{2022! + 2023! + 2024!}.$$

Veja que

$$\begin{aligned} \frac{k}{(k-2)! + (k-1)! + k!} &= \frac{k}{(k-2)! \cdot [1 + (k-1) + (k-1)k]} \\ &= \frac{k}{(k-2)! \cdot (k + k^2 - k)} = \frac{k}{(k-2)! k^2} = \frac{k-1}{(k-2)! (k-1)k} \\ &= \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\sum_{k=2}^{2024} \frac{k}{(k-2)! + (k-1)! + k!} = \sum_{k=2}^{2024} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right)$$

é uma soma telescópica. Com isso,

$$\begin{aligned} &\frac{2}{0! + 1! + 2!} + \frac{3}{1! + 2! + 3!} + \cdots + \frac{2024}{2022! + 2023! + 2024!} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2023!} - \frac{1}{2024!}\right) = 1 - \frac{1}{2024!}. \end{aligned}$$

Também recebemos uma solução correta de Yan Lima Machado

Novos Problemas

Problemas Universitários

Problema 14. Sejam $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ subconjuntos não vazios de $\{1, 2, \dots, n\}$. Prove que existem conjuntos de índices disjuntos e não vazios $I, J \subset \{1, 2, \dots, n+1\}$ tais que

$$\bigcup_{k \in I} A_k = \bigcup_{k \in J} A_k.$$

Problema 15. Dizemos que um grupo $G = (G, *)$ tem raiz se existe um grupo $H = (H, \cdot)$ de tal sorte que G é isomorfo a $H \times H$. Mostre que o grupo $(\mathbb{R}, +)$ não possui raiz.

Dica: Tente ver a possível raiz como um subespaço vetorial de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Como construir uma base para esse espaço vetorial?

Problema 16. Seja G um conjunto finito de matrizes $n \times n$ de coeficientes reais $\{M_i\}$, $1 \leq i \leq r$, que forma um grupo sobre a multiplicação matricial. Suponha que $\sum_{i=1}^r \text{tr}(M_i) = 0$, onde $\text{tr}(A)$ denota o traço da matriz A . Prove que $\sum_{i=1}^r M_i$ é a matriz nula.

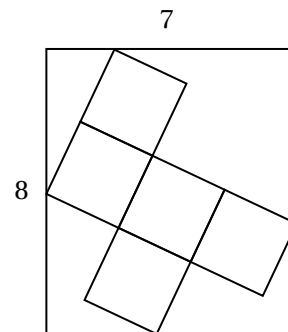
Problema 17. Seja $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx$, onde $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais e n é um inteiro positivo. Dado que $|f(x)| \leq |\sin x|$ para todo o número real x , prove que $|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1$.

Problema 18. Calcule a integral

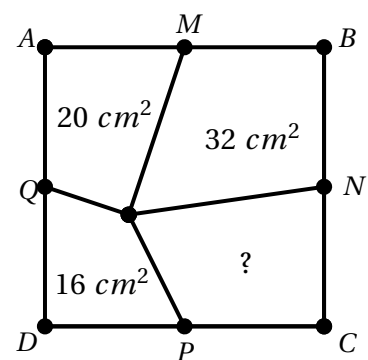
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{25} x}{\cos^{25} x + \sin^{25} x} dx.$$

Problemas de Matemática Elementar

Problema 19. A figura a seguir consiste de 5 quadrados iguais colocados no interior de um retângulo $8\text{cm} \times 7\text{cm}$. Qual a medida do lado desses quadrados?



Problema 20. Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado e M, N, P e Q são os pontos médios dos seus lados. As áreas de três regiões do seu interior são 20 cm^2 , 32 cm^2 e 16 cm^2 , também como indicado na figura. Qual a área da quarta região?



Problema 21. Dois inteiros positivos x e y são tais que

$$\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}.$$

Encontre o menor valor possível para a soma $x + y$.

Problema 22. Sejam a, b e c reais satisfazendo $a + b + c = 0$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Qual o valor de $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$?

Problema 23. *Mostre que*

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} > \frac{9}{2}$$

Problema 24. *Em uma sequência de inteiros positivos, uma inversão é um par de posições em que o elemento da posição mais a esquerda é maior que o elemento da posição mais a direita. Por exemplo, a sequência 2, 5, 3, 1, 3 tem 5 inversões: entre a primeira e a quarta posição, entre a segunda e todas as demais para a direita e, finalmente, entre a terceira e a quarta. Qual é o maior número possível de inversões em uma sequência de inteiros positivos cuja a soma de seus elementos é 2019?*

Problema 25. *A soma dos números positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$ é igual a $\frac{1}{2}$. Prove que*

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} \cdots \frac{1-x_n}{1+x_n} \geq \frac{1}{3}$$

CÓLOFON

Esta edição contou com a colaboração dos seguintes alunos:



Álisson Conceição Santos é egresso do IFBA, campus Salvador. Atualmente, é estudante de graduação em Matemática na UFBA, onde também é bolsista do PIBID. Além disso, Álisson atua como voluntário nas exposições do LEMA e integra o projeto de extensão Ondjango Asili.



Cleber Brito Figueiredo é estudante do bacharelado em física na Universidade Federal da Bahia (UFBA). Atualmente faz iniciação científica como bolsista da FAPESB em um projeto focado na teoria de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). Além disso, Cleber é apaixonado por jogos de tabuleiro e histórias de mistério.



Eldon Barros dos Reis Júnior é bacharel em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (UFBA) e atua como bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) na área de Probabilidade com o projeto “Método da Entropia Relativa e q -Entropia”.



João Vitor Fonseca iniciou sua trajetória acadêmica no curso de engenharia elétrica, com uma longa passagem na medicina e, por fim, na matemática, onde hoje cursa bacharelado. Realizou pesquisas na área de epidemiologia e patologia digital, quando foi bolsista do programa PIBIC. Além da matemática, tem grande interesse em música, entusiasta da improvisação.



José Valdomiro da Silva Neto é estudante do bacharelado em estatística na UFBA. Assistente de esportes na Associação Acadêmica Atlética Alan Turing e monitor voluntário nas exposições do LEMA, José está apenas começando sua jornada na universidade.



Taíse Lara de Souza Jorge é licenciada em Matemática pela UFBA e mestranda em Educação pela UFFS. Realiza pesquisa na área de Mediação Pedagógica e Alfabetização Matemática sob a perspectiva do Numeramento, amparada na Educação Crítica e Educação Matemática Crítica.



Yure Carneiro de Oliveira graduou-se e fez mestrado em matemática na UFBA, onde também realiza seu doutorado em matemática na área de Probabilidade. Após quase concluir um mestrado em estatística, ingressar em uma outra graduação e começar a estudar violino, agora está focado na conclusão do doutorado.



Link para o *site* da
Revista de Matemática Hipátia

