PROBLEMA

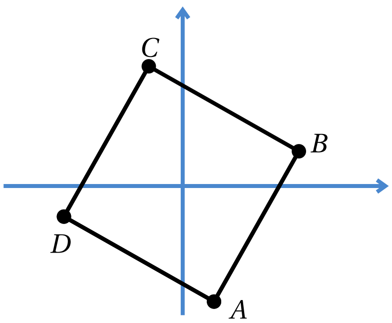
Contando Inversões

Yure Carneiro e Samuel Feitosa

Soluções da Edição Anterior

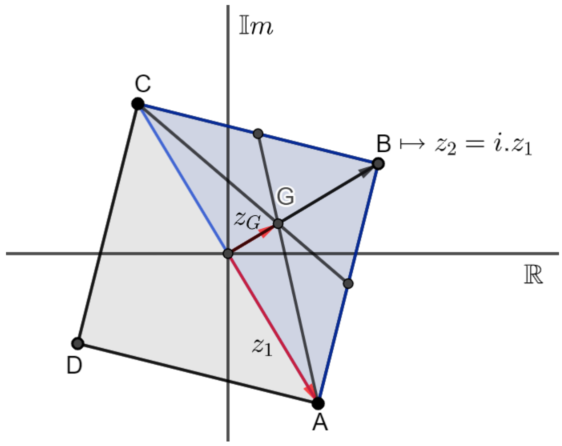
Problemas Universitários

Problema 1. *No plano complexo (plano de Argand-Gauss) um quadrado $ABCD$ tem centro no ponto $z = 0$.*



Se o vértice A encontra-se no afixo do número complexo z_1, determine o número complexo que representa o baricentro do triângulo ABC.

Solução. *Observe a figura a seguir. Se o vértice A é o afixo do número complexo z_1, segue que o vértice B corresponde ao afixo do número complexo iz_1.(O número complexo cujo afixo é o ponto B é obtido de z_1 por uma rotação de 90^o no sentido anti-horário, o que é obtido por uma multiplicação por i).*



Por fim, como o triângulo ABC é isósceles de base AC, segue que OB é uma das medianas do triângulo. Sendo G o braricentro do triângulo ABC, segue que $OG = \frac{1}{3}OB \Rightarrow z_G = \frac{1}{3}i.z_1$ (onde z_G é o número complexo cujo afixo é o ponto G). Diante do exposto,

$$z_G = \frac{1}{3} \cdot z_1 = \frac{z_3}{3}\left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right).$$

Também recebemos uma solução correta de Yan Lima Machado

Problema 2. *Qual o número de pares ordenados (a, b) de inteiros positivos a, b tais que as seguintes condições sejam simultaneamente satisfeitas?*

(i) $a \mid 6000$;

(ii) $1 \le b \le \frac{6000}{a}$;

(ii) $\mathrm{mdc}(a, b, \frac{6000}{a}) = 1$.

Solução. *A função $f(n)$ que conta tais pares com n no lugar de 6000 é multiplicativa, ou seja, $f(mn) = f(m)f(n)$ se m, n são primos entre si. Daí é fácil ver que $f(n) = n \cdot \prod_{p|n}(1 + \frac{1}{p})$ com p primo.*

Problema 3. *Seja $r(x)$ o polinômio que é o resto na divisão de x^{2050} por $x^5 + x^2 + 1$. Quantos coeficientes ímpares possui $r(x)$?*

Solução. *Vamos trabalhar no anel de polinômios $\mathbb{F}_2[x]$, em que $\mathbb{F}_2$ é o corpo dos inteiros módulo 2. Neste anel, temos*

$$x^5 \equiv x^2 + 1 \pmod{x^5 + x^2 + 1}$$

implica que

$$x^{10} \equiv (x^2 + 1)^2 \equiv x^4 + 1 \pmod{x^5 + x^2 + 1},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} x^{20} &\equiv (x^4 + 1)^2 \\ &\equiv x^8 + 1 \equiv x^3(x^2 + 1) + 1 \\ &\equiv x^2 + x^3 \pmod{x^5 + x^2 + 1} \end{aligned}$$

e portanto, módulo $x^5 + x^2 + 1$,

$$\begin{array}{rcl} x^{30} & \equiv & (x^2 + x^3) \cdot (x^4 + 1) \\ & \equiv & x^7 + x^6 + x^3 + x^2 \\ & \equiv & x^2(x^2 + 1) + x(x^2 + 1) + x^3 + x^2 \\ & \equiv & x^4 + x \\ \Longrightarrow x^{31} & \equiv & x^5 + x^2 \\ & \equiv & 1 \end{array}$$

(Uma maneira mais rápida de obter a última congruência seria perceber que $x^5 + x^2 + 1$ é irredutítvel em $\mathbb{F}_2[x]$, logo $\mathbb{F}_2[x]/(x^5 + x^2 + 1)$ é um corpo, extensão de $\mathbb{F}_2$ de grau 5, logo possui $2^5 = 32$ elementos e por Lagrange $a^{31} \equiv 1 \pmod{x^5 + x^2 + 1}$ se $a \not\equiv 0 \pmod{x^5 + x^2 + 1}$). Por fim, $x^{2046} \equiv (x^{31})^{66} \equiv 1 \Longrightarrow x^{2050} \equiv x^4$. Assim, $r(x)$ é congruente a x^4 módulo 2 e possui apenas 1 coeficiente ímpar.

Problema 4. *Considere Γ o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja razão entre a distância de P à origem e a distância entre P e a reta $y = -1$ é constante e igual a $\frac{1}{2}$. Qual a maior distância entre dois pontos de Γ ?*

Solução. *A descrição de tal lugar geométrico Γ é de uma cônica com excentricidade $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, ou seja, Γ é uma elipse. Além disso, um dos focos dessa elipse é a origem e a reta $y = -1$ é uma diretriz. Assim, o eixo focal (sendo perpendicular à diretriz) é vertical, paralelo ao eixo y. De onde, o eixo focal é o próprio eixo y. Assim, a maior distância entre dois pontos de Γ é exatamente o dobro do comprimento do semieixo maior, isto é, $2a$.*

Para completar, sendo A o vértice da elipse que está entre o foco $F_1 = (0,0)$ e a diretriz $r : y = -1$, temos

$$1 + \frac{d(A,r)}{d(A,F_1)} = \frac{d(A,F_1) + d(A,r)}{d(A,F_1)} = \frac{d(F_1,r)}{d(A,F_1)} = \frac{1}{d(A,F_1)}$$

e

$$a - c = d(A,F_1) = \frac{1}{1 + \frac{1}{e}} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}.$$

Também,

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a}{2}.$$

Então, $a - \frac{a}{2} = \frac{1}{3}$ e $a = \frac{2}{3}$. De onde, a máxima distância procurada é $2a = \frac{4}{3}$.
Também recebemos uma solução correta de Yan Lima Machado

Problema 5. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar e diferenciável satisfazendo:*

- *$f(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$;*
- *$f'(0) = -1$.*

Mostre que $f(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. *Como $f(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $f'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$. De onde, $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Agora, se existisse a tal que $f'(a) > 0$ e como $f'(0) = -1$, teríamos

$$-1 = f'(0) < 0 < f'(a).$$

Então, pelo Teorema de Darboux (valor intermediário para a derivada), existiria b entre 0 e a tal que $f'(b) = 0$, o que contraria o que acabamos de descobrir acima. Portanto, $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e f é estritamente decrescente.

Assim, se $f(x) > -x$ para algum x, então $x = f(f(x)) < f(-x) = -f(x)$, isto é, $f(x) < -x$, sendo uma contradição. Analogamente, não pode ocorrer $f(x) < -x$. Portanto, $f(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 6. *Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Prove que rank(A) + rank$(B) \le n$ se, e somente se, existe uma matriz invertível $X \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AXB = O_n$, onde O_n é a matriz nula de ordem n.*

Solução. *Queremos mostrar que*

$$rank(A)+rank(B) \leq n \quad \Leftrightarrow \quad \exists X \text{ invertível} : AXB = O_n$$

$(\Leftarrow)$: *Supondo a existência de uma matriz invertível X satisfazendo $AXB = O_n$, pela desigualdade de Sylvester para o posto de matrizes, tem-se*

$$0 = rank(O_n) = rank(AXB) \geq rank(A) + rank(XB) - n$$

e

$$\begin{aligned} rank(XB) &\geq rank(B) + rank(X) - n \\ &= rank(B) + n - n = rank(B). \end{aligned}$$

Daí, $0 \geq rank(A) + rank(B) - n$, ou seja, $rank(A) + rank(B) \leq n$.

$(\Rightarrow)$: *Estamos supondo agora que $rank(A) + rank(B) \leq n$. Existem matrizes inversíveis X_A, Y_A, X_B e Y_B tais que*

$$Y_A \cdot A \cdot X_A = \begin{bmatrix} I_{rank(A)} & 0 \\ 0 & O_{n-rank(A)} \end{bmatrix}$$

e

$$X_B \cdot B \cdot Y_B = \begin{bmatrix} O_{n-rank(B)} & 0 \\ 0 & I_{rank(B)} \end{bmatrix}$$

onde $I_{rank(A)}$ e $I_{rank(B)}$ são matrizes identidades de ordens $rank(A)$ e $rank(B)$, respectivamente. E 0 ali representam matrizes nulas com as devidas ordens para preencherem as entradas restantes. Assim, multiplicando $Y_A \cdot A \cdot X_A$ e $X_B \cdot B \cdot Y_B$, obtemos

$$\begin{bmatrix} I_{rank(A)} & 0 \\ 0 & O_{n-rank(A)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} O_{n-rank(B)} & 0 \\ 0 & I_{rank(B)} \end{bmatrix} = O_n$$

essa última igualdade ocorre pois $n - rank(B) \geq rank(A)$ e $n - rank(A) \geq rank(B)$.

Portanto, tomando $X = X_A \cdot X_B$ (que é invertível), obtemos

$$AXB = Y_A^{-1} \cdot O_n \cdot Y_B^{-1} = O_n.$$

Problemas de Matemática Elementar

Problema 7. *Nas Olimpíadas de Pirajuba, existem 6 competidores e 8 dias de evento. Os três primeiros competidores de cada dia do evento recebem uma medalha, que pode ser de ouro, prata e bronze. Não existem empates e uma medalhade cada tipo é dada a apenas um atleta em cada dia do evento. Cada competidor recebe 5 pontos por cada medalha de ouro, 3 pontos por cada medalha de prata e 1 ponto por cada medalha de bronze. Se Luciana, que é uma das competidoras, conseguiu um total de 27 pontos no final do evento, qual o número máximo de medalhas de prata que ela pode ter recebido?*

Solução. *Como são oito dias de evento, ela não pode ter ganho mais que 8 medalhas de prata. Veja que essa quantidade não satisfaz o enunciado, pois $8 \cdot 3 = 24 < 27$. Assim, ela obteve menos de 8 medalhas de prata. Vamos analisar os casos possíveis para determinar o número máximo de medalhas de prata que ela pode obter:*

a) Se ela tivesse obtido 7 medalhas de prata, teria que fazer $27 - 3 \cdot 7 = 6$ pontos em um dia de evento, mas isso não é possível.

b) Se ela tivesse obtido 6 medalhas de prata, teria que fazer $27-3\cdot 6 = 9$ pontos em dois dias de evento, mas isso não é possível pois $5+3 < 9 < 5+5$.

c) Se ela tivesse obtido 5 medalhas de prata, teria que fazer $27 - 3 \cdot 5 = 12$ pontos em três dias de evento. Como $12 > 3 \cdot 3$, pelo menos uma medalha de ouro, valendo 5 pontos, teria que ser obtida. Por outro lado, não é possível combinar apenas duas parcelas de 1, 3 e 5 para obter os $12 - 5 = 7$ pontos restantes. Consequentemente, ela não pode ter obtido 5 medalhas de prata.

Para mostrar que 4 medalhas de prata é o máximo, basta exibirmos um exemplo. Após obter $3 \cdot 4 = 12$ pontos em 4 dias com medalhas de prata, ela precisaria ter obtido $27 - 3 \cdot 4 = 15$ pontos nos outros 4 dias. Luciana pode obter essa pontuação com 3 medalhas de ouro em 3 dias e 1 dia sem premiação.
Também recebemos uma solução correta de Yan Lima Machado

Problema 8. *Um encontro de britânicos e italianos em uma cafeteria reuniu 55 pessoas. Cada uma dessas pessoas pediu café ou chá. Sabemos que os britânicos sempre contam a verdade quando bebem chá e mentem quando bebem café. Já os italianos se comportam de modo oposto. Um repórter realizou uma rápida pesquisa e descobriu os seguintes fatos:*

1) 44 pessoas responderam sim para a pergunta: Você está bebendo café?

2) 33 pessoas responderam sim para a pergunta: Você é italiano?

3) 22 pessoas concordaram com a afirmação: Está chovendo lá fora.

Quantos britânicos na cafeteria estavam tomando chá?

Solução. *Qualquer pessoa que afirme estar bebendo café necessariamente precisa ser italiana. Portanto,* *existem* 44 *italianos e* 11 *britânicos. Qualquer pessoa que afirme ser italiano tem que estar bebendo café. Portanto, havia 33 pessoas bebendo café. Seja* n *o número de britânicos bebendo café. Então existiam* $11-n$ *britânicos bebendo chá,* $33-n$ *italianos bebendo café e* $44-(33-n)=11+n$ *italianos bebendo chá. Se não estava chovendo no lado de fora, então* $n+(11+n)=22$, *mas* n *não é um inteiro nesse caso. Portanto, estava chovendo no exterior e* $(11-n)+(33-n)=22$, *consequentemente,* $n=11$. *Segue daí que* 0 *britânicos estavam bebendo chá.*

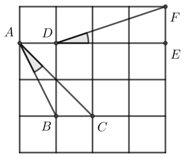
Problema 9. *Érica viajou para um país estrangeiro e sacou* \$800 *da moeda local em um banco. O caixa deu essa quantia usando notas de* \$20, \$50 *e* \$100, *usando pelo menos uma nota de cada tipo. De quantas maneiras diferentes ele pode ter feito esse pagamento para ela?*

Solução. *Se* x, y *e* z *são as quantias de notas de* \$20, \$50 *e* \$100, *respectivamente, portanto* $2x+5y+10z=80$. *Como temos uma nota de cada tipo, podemos descontar uma* 1 *unidade de cada uma das incógnitas anteriores e reduzir a equação para* $2a+5b+10c=63$. *Como* 63 *é ímpar, precisamos que* b *seja ímpar. Podemos analisar os casos. Quando* $b=1$, $2a+10c=58$. *Daí* $10c=0,10,20,30,40$ *ou* 50, *ou seja, temos* 6 *soluções. Quando* $b=3$, $2a+10c=48$ *e daí* $10c=0,10,20,30$ *ou* 40, *ou seja, temos* 5 *soluções. Continuando essa contagem, para* $b=5$, 7, 9 *e* 11, *teremos*

$$6+5+4+3+2+1=21$$

soluções.
Também recebemos uma solução correta de Yan Lima Machado

Problema 10. *Na malha a seguir, todos os quadradinhos possuem lados de mesma medida. Explique o porquê de os ângulos* $\angle BAC$ *e* $\angle EDF$ *possuírem a mesma medida.*

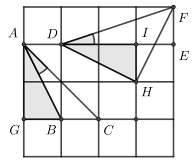


Solução. *(Solução de Yan Lima Machado) Seja* $BC=x$. *Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que:*

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{5}x \\ AC &= \sqrt{8}x \\ DF &= \sqrt{10}x \end{aligned}$$

Ademais, considere $\angle BAC=\alpha$ *e* $\angle EDF=\beta$. *Temos* $\cos(\beta)=\frac{3x}{\sqrt{10}x}=\frac{3}{\sqrt{10}}$ *e, pela Lei dos Cossenos no triângulo* ABC, $x^2=8x^2+5x^2-4\sqrt{10}x^2\cos(\alpha)$, *ou seja,* $\cos(\alpha)=\dfrac{12x^2}{4\sqrt{10}x^2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$. *Como* $\alpha,\beta\in(0,\pi/2)$ *e* $\cos\alpha=\cos\beta$, *segue que* $\alpha=\beta$.

Segunda Solução: Note que $DH=HF$, *pois ambos são diagonais de um retângulo* 2×1 *e, além disso,* $\angle IHF=\angle IDH$.



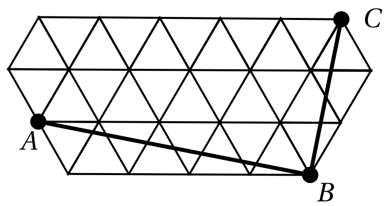
Portanto,

$$\angle DHF=\angle DHI+\angle IHF=\angle DHI+\angle HDI=90^\circ.$$

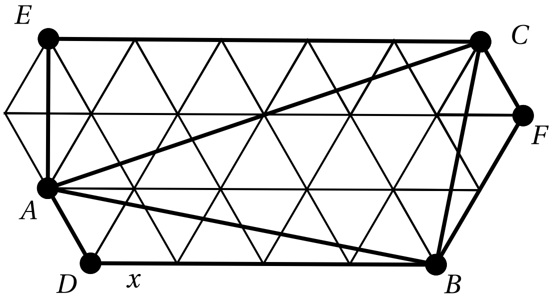
Assim, AGC *e* DHF *são ambos triângulos retângulos isósceles. Como os triângulos* AGB *e* DHI *são congruentes, segue que*

$$\angle BAC=45^\circ-\angle BAG=45^\circ-\angle HDI=\angle FDE.$$

Problema 11. *Na figura a seguir, todos os triângulos são equiláteros e idênticos. Encontre a medida do ângulo* $\angle ABC$.



Solução. *(Solução de Yan Lima Machado) Considere a medida dos lados dos triângulos igual a x e sejam D, E, e F os vértices marcados na figura a seguir.*



Como o triângulo AEC é retângulo em E, pois AE é mediatriz de um dos segmentos da malha, temos pelo Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AE^2 + EC^2 \\ &= 3x^2 + 25x^2 \\ &= 28x^2. \end{aligned}$$

Pela Lei dos Cossenos nos triângulos ADB e BCF, temos

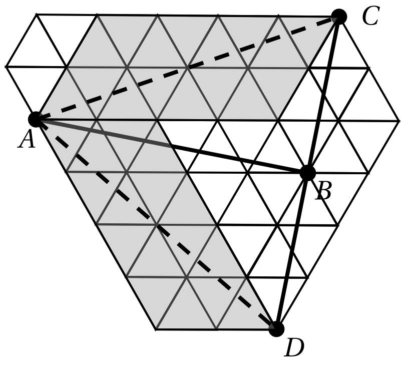
$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 - 2AD\cdot DB\cdot\cos 120^\circ + DB^2 \\ &= x^2 - 2\cdot 4x^2(\frac{-1}{2}) + 16x^2 \\ &= 21x^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} BC^2 &= CF^2 - 2CF\cdot FB\cdot\cos 120^\circ + FB^2 \\ &= x^2 - 2\cdot 2x^2(\frac{-1}{2}) + 4x^2 \\ &= 7x^2. \end{aligned}$$

Como $AC^2 = AB^2 + BC^2$, pela recíproca do Teorema de Pitágoras, temos que $\angle ABC = 90°$

Segunda Solução: Continue o ladrilhamento com triângulos equiláteros como na figura anterior.



Note que o segmento CB é a diagonal de um paralelogramo formado por 4 triângulos do reticulado e, por simetria, o seu prolongamento irá encontrar o vértice D de outro paralelogramo também formado por 4 triângulos do reticulado. Tanto AD quanto AC são diagonais de paralelogramos congruentes, que estão pintados de cinza no desenho, portanto, $AC = AD$. Assim, como B é o ponto médio de CD, o segmento AB é uma altura do triângulo isósceles ACD e daí $\angle ABC = 90°$.

Problema 12. *Prove que*

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{12}$$

Solução. *Se*

$$K = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100},$$

temos

$$K > \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{98}{99}.$$

Portanto, multiplicando a igualdade anterior por essa última desigualdade, obtemos:

$$K^2 > \frac{1}{200} > \frac{1}{225},$$

ou seja,

$$K > \frac{1}{15}.$$

Agora, para mostrar a outra desigualdade do problema, temos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{97}{98}\cdot\frac{99}{100} \\ &< \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{8}{9}\cdots\frac{98}{99}\cdot\frac{100}{101}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\frac{98}{99}\cdot\frac{100}{101}\right) \end{aligned}$$

O último membro pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{101K} = \frac{175}{16\cdot 16\cdot 101K}$$

Daí,

$$K^2 < \frac{175}{16\cdot 1616} < \frac{175}{16\cdot 1575} = \frac{175}{16\cdot 9\cdot 175} = \frac{1}{144} = \frac{1}{12^2}$$

e, portanto, $K < \frac{1}{12}$. Logo,

$$\frac{1}{15} < K < \frac{1}{12}.$$

Problema 13. *Avalie a soma simplificando ao máximo sua expressão*

$$\frac{2}{0!+1!+2!} + \frac{3}{1!+2!+3!} + \cdots + \frac{2024}{2022!+2023!+2024!}.$$

Solução. *Queremos simplificar ao máximo a expressão da soma*

$$\frac{2}{0!+1!+2!}+\frac{3}{1!+2!+3!}+\cdots+\frac{2024}{2022!+2023!+2024!}.$$

Veja que

$$\frac{k}{(k-2)!+(k-1)!+k!}=\frac{k}{(k-2)!\cdot[1+(k-1)+(k-1)k]}$$

$$=\frac{k}{(k-2)!\cdot(k+k^2-k)}=\frac{k}{(k-2)!k^2}=\frac{k-1}{(k-2)!(k-1)k}$$

$$=\frac{k-1}{k!}=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}.$$

Daí,

$$\sum_{k=2}^{2024}\frac{k}{(k-2)!+(k-1)!+k!}=\sum_{k=2}^{2024}\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}$$

é uma soma telescópica. Com isso,

$$\frac{2}{0!+1!+2!}+\frac{3}{1!+2!+3!}+\cdots+\frac{2024}{2022!+2023!+2024!}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2023!}-\frac{1}{2024!}\right)=1-\frac{1}{2024!}.$$

Também recebemos uma solução correta de Yan Lima Machado

Novos Problemas

Problemas Universitários

Problema 14. *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ subconjuntos não vazios de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Prove que existem conjuntos de índices disjuntos e não vazios $I, J \subset \{1, 2, \ldots, n+1\}$ tais que*

$$\bigcup_{k\in I} A_k = \bigcup_{k\in J} A_k.$$

Problema 15. *Dizemos que um grupo $G = (G, *)$ tem raiz se existe um grupo $H = (H, \cdot)$ de tal sorte que G é isomorfo a $H \times H$. Mostre que o grupo $(\mathbb{R}, +)$ não possui raiz.*
Dica: Tente ver a possível raíz como um subespaço vetorial de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Como construir uma base para esse espaço vetorial?

Problema 16. *Seja G um conjunto finito de matrizes $n \times n$ de coeficientes reais $\{M_i\}$, $1 \le i \le r$, que forma um grupo sobre a multiplicação matricial. Suponha que $\sum_{i=1}^r tr(M_i) = 0$, onde $tr(A)$ denota o traço da matriz A. Prove que $\sum_{i=1}^r M_i$ é a matriz nula.*

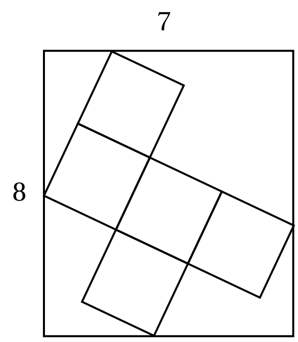
Problema 17. *Seja $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais e n é um inteiro positivo. Dado que $|f(x)| \le |\sin x|$ para todo o número real x, prove que $|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \le 1$.*

Problema 18. *Calcule a integral*

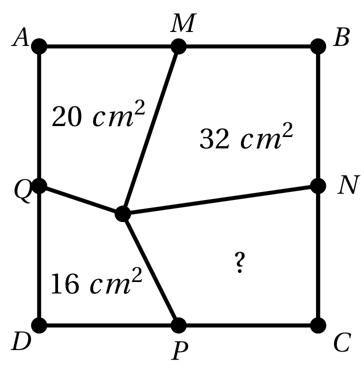
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{25} x}{\cos^{25} x + \sin^{25} x}\,dx.$$

Problemas de Matemática Elementar

Problema 19. *A figura a seguir consiste de 5 quadrados iguais colocados no interior de um retângulo $8cm \times 7cm$. Qual a medida do lado desses quadrados?*



Problema 20. *Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado e M, N, P e Q são os pontos médios dos seus lados. As áreas de três regiões do seu interior são $20\,cm^2$, $32\,cm^2$ e $16\,cm^2$, também como indicado na figura. Qual a área da quarta região?*



Problema 21. *Dois inteiros positivos x e y são tais que*

$$\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}.$$

Encontre o menor valor possível para a soma $x + y$.

Problema 22. *Sejam a, b e c reais satisfazendo $a + b + c = 0$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Qual o valor de $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$?*

Problema 23. *Mostre que*

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}>\frac{9}{2}$$

Problema 24. *Em uma sequência de inteiros positivos, uma inversão é um par de posições em que o elemento da posição mais a esquerda é maior que o elemento da posição mais a direita. Por exemplo, a sequência* $2,5,3,1,3$ *tem* 5 *inversões: entre a primeira e a quarta posição, entre a segunda e todas as demais para a direita e, finalmente, entre a terceira e a quarta. Qual é o maior número possível de inversões em uma sequência de inteiros positivos cuja a soma de seus elementos é* 2019*?*

Problema 25. *A soma dos números positivos* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *é igual a* $\frac{1}{2}$*. Prove que*

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdots\frac{1-x_n}{1+x_n}\geq\frac{1}{3}$$