

Revista de Matemática



Hipátia

Dezembro de 2024

Volume 2, Número 1



Rafael — Casamento da Virgem

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Reitor: Paulo César Miguez de Oliveira

Pró-Reitoria de Extensão Universitária

Pró-Reitor: Guilherme Bertissolo

Instituto de Matemática e Estatística

Diretor: Kleyber Mota da Cunha

Departamento de Matemática

Chefe: Darllan Conceição Pinto

Revista de Matemática
Hipátia

Conselho Editorial

André Mandolesi

Cristina Lizana

Elaís Cidely S. Malheiro

Henrique da Costa

Márcia Barbosa

Nicola Sambonet

Roberto Sant'Anna

Samuel Feitosa

Equipe Técnica

Álison Conceição

Cleber Brito Figueiredo

Eldon Barros dos Reis Júnior

João Vítor Fonseca

José Valdomiro da Silva Neto

Taíse Lara de Souza Jorge

Yure Carneiro

Editor Responsável: Vinícius Mello

Endereço para Correspondência

Instituto de Matemática e Estatística

Av. Milton Santos, s/n, Campus Universitário de Ondina CEP: 40.170-110

hipatia@ufba.br

SINOPSE

EPÍSTOLA	
Ampliação	1
HISTÓRIA	
Uma Descrição da Gênese do	
Método Axiomático	3
TÉCNICA	
Caminhando pelas Sequências de Farey.....	15
ANTOLOGIA	
Matemática e Matemáticos	
Pensamentos e Curiosidades.....	26
SIMPÓSIO	
Eventos do DMAT	33
PROBLEMA	
O Encontro na Cafeteria	
e Outros Problemas	43



EPÍSTOLA

Ampliação

Caro Leitor,

Informamos com alegria que nossa equipe técnica foi ampliada com a chegada de Álisson, Cleber, João Vítor, José Valdomiro e Yure. Sejam bem-vindos! Essa ampliação é fundamental para consolidar o projeto de extensão ao qual a Revista de Matemática Hipátia está vinculada. Nosso objetivo é que a revista cresça ainda mais e se torne um importante veículo de divulgação matemática no cenário local e, quem sabe, nacional.

Esta edição conta com um variado conjunto de temas. Em HISTÓRIA, o prof. Marcelo Papini traça sua visão das origens do método axiomático. O convite para o prof. Papini escrever para nossa revista teve duas razões. A primeira é por tratar-se de um especialista no assunto, tendo já publicado o livro “Contribuição ao estudo histórico e crítico do pensamento matemático”, pela LF Editora. A segunda razão é nossa admiração por sua prosa particular, percebida nas mensagens eletrônicas trocadas na lista de professores do Departamento de Matemática da UFBA, do qual fazemos parte.

Em TÉCNICA, o prof. Carlos Augusto Ribeiro nos brinda com um artigo bastante completo — e pioneiro em português — sobre as Sequências de Farey, essa maneira curiosa de gerar todas as frações próprias. O prof. Carlos Augusto pode ser considerado um parceiro da Revista de Matemática Hipátia, tendo colaborado na edição anterior.

Na seção ANTOLOGIA, apresentamos uma seleção de ditos sobre Matemática de vários matemáticos, filósofos e pensadores em geral, compilados por Alphonse Rebière (1842–1900), um matemático que se destacou pela defesa da participação feminina na ciência, fato notável considerando a condição das mulheres em sua época. Em sua coletânea, Rebière faz uma justaposição interessante de citações, possibilitando um diálogo entre personagens de diferentes épocas.

Encerramos esta edição com as tradicionais seções SIMPÓSIO, a qual registra o vibrante cenário de eventos realizados no Departamento de Matemática da UFBA, e PROBLEMA, contendo novos problemas e soluções daqueles propostos na edição anterior.

Na CAPA, temos uma superposição da lindíssima pintura “O Casamento da Virgem”, também conhecida como *Lo Sposalizio*, de Rafael Sanzio, expoente da renascença italiana, com uma representação gráfica das Sequências de Farey, descrita em TÉCNICA. Essa montagem, composta pelo prof. Nicola, poderia parecer arbitrária à primeira vista, mas os mestres do renascimento tinham tanto conhecimento intuitivo de Harmonia, que não espanta que, de algum modo, as Sequências de Farey estejam lá de fato.

Salvador, 13 de dezembro de 2024.

O Editor

HISTÓRIA

Uma Descrição da Gênese do Método Axiomático

Marcelo Papini

A descrição de qualquer fato histórico dependerá da perspectiva adotada pelo narrador. Para acen-
tuar a possibilidade de se escreverem outras descri-
ções, talvez mais precisas, da gênese do método axio-
mático, o presente escrito recebeu um título iniciado
pelo artigo indefinido *uma*. Nada obstante, espera o
autor que a presente descrição possa constituir tanto
para o início de uma reflexão acerca da prática ma-
temática, quanto uma iniciação a um tema extrema-
mente relevante à matemática, à física e à filosofia,
qual seja, o *método axiomático*.

Antelóquio

A presença das pirâmides no Egito e de poliedros as-
semelhados no México atestam que nós, os seres hu-
manos, convivemos com a geometria há alguns milê-
nios.

Podemos conjecturar que, inicialmente, os seres
humanos houvessem observado diversos fatos geo-
métricos e elaborado hipóteses que os explicassem;
que, depois, houvessem praticado experimentos para
verificar as hipóteses pertinentes; e que, finalmente,
houvessem catalogado as hipóteses que tivessem re-
cebido confirmação empírica.

Apoiando essa conjectura, farei referência apenas
ao denominado Papiro de Moscou, ao qual os histori-
adores atribuíram a data de 1850 a.C. (época na qual
vivia o patriarca Abraão, ainda consoante os historia-
dores que esmiuçaram o assim chamado *Antigo Tes-
tamento* da cultura judaica).

A fim de nos situarmos no tempo histórico, cito o
testemunho do escritor helênico Heródoto de Hali-

carnasso (484 a.C. 420 a.C.), segundo o qual a geo-
metria nascera no Egito, para atender às exigências
de agrimensura impostas aos harpedonaptas¹, obri-
gados a retraçar os limites dos lotes agrícolas, após as
inundações anuais do rio Nilo.

Os documentos mais abrangentes do saber geomé-
trico egípcio são o papiro Rhind e o papiro de Mos-
cou, que registraram regras para o cálculo da área
de algumas figuras planares (como os triângulos, os
quadriláteros e o disco) e o volume de alguns corpos
(como o cubo, os paralelepípedos, o tronco de cilin-
dro circular e o tronco de pirâmide de base quadran-
gular).

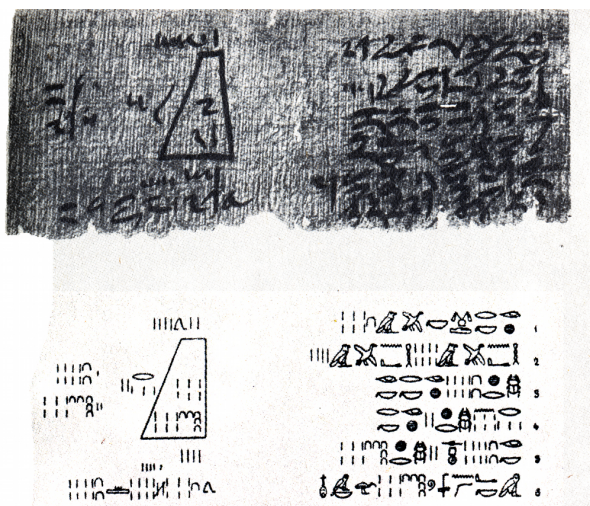
Do papiro de Moscou, por exemplo, consta a regra
para cálculo do volume de uma pirâmide quadrada
e truncada, isto é, de uma pirâmide cuja base é um
quadrado de lado igual a B e da qual se retirou uma
pirâmide a ela semelhante, cuja base fosse um qua-
drado de lado igual a C . O volume desse poliedro é
calculado por

$$\frac{H}{3} (B^2 + BC + C^2),$$

onde H indica a altura vertical da pirâmide truncada,
[2, p. 7].

Segundo uma tradição conservada pelo escritor
grego Diógenes Laércio, que viveu pelo século III d.C.,
a geometria fora transmitida aos gregos por Tales de
Mileto, que viajara pelo Egito, relato esse que se deve
acolher com cautela pois também de outros intelec-
tuais gregos (como Sólon de Atenas e Demócrito de
Abdera) se narram viagens ao Egito, país que fora

¹“Esticador de corda”, agrimensor. (N. do E.)



O problema 14 do Papiro de Moscou é um cálculo do volume de uma pirâmide truncada.

considerado pelos gregos como “um repositório de conhecimento invulgar”, [32, p. 11].

Essa mesma tradição atribui a Tales de Mileto a prova de alguns fatos geométricos mas, na primeira fase evolutiva da matemática grega, a prova consistia em tornar evidente [e + vidêre = ver] ou visível a veracidade de uma sentença. A isso chamava-se *método epagógico*. [34, p. 127–128]

Segundo o testemunho de Proclo de Constantinopla, para *provar visualmente* (empregando, pois, o método epagógico) a congruência entre os dois triângulos obtidos de um triângulo isósceles, ao se traçar a bissetriz do ângulo cujos lados fossem congruentes, Tales dobrava ao longo dessa bissetriz uma figura concreta de um tal triângulo.

Ainda segundo Proclo, dobrando a figura concreta de um disco ao longo de um qualquer diâmetro, Tales teria provado visualmente que todo diâmetro de um disco o divide em duas partes congruentes. [14, p. 25][33, p. 25]

Desse modo, Tales parece haver vislumbrado a primazia do *conceito de congruência*, que desempenharia papel decisivo no pensamento geométrico.

Na fase evolutiva seguinte, a ênfase foi transferida para o *método apagógico*, que consistia em se fornecer um argumento, construído mediante o encadeamento de proposições, o qual sustentasse a sentença considerada. Conjuntamente, esses dois métodos indicam dois aspectos da atividade intelectual: o aspecto perceptual e o aspecto conceitual. [34, p. 121]

Ainda não se pôde precisar quando o saber geométrico se converteu em um corpo de proposições sequencialmente articuladas. Atribui-se à escola jônica e à escola pitagórica a substituição dos enunciados de fatos empíricos insulados por cadeias de proposições,

na qual cada proposição ocupasse um lugar definido e fosse inferida das proposições que a antecederem. Dessa fase histórica resta-nos apenas um fragmento, os *Elementos*, do filósofo jônico Hipócrates de Quios (circa 430 a.C.). [22, p. 120][41, p. 1][42, p. 39–40]

Nesses *Elementos* de Hipócrates, os juízos se classificavam em dois tipos, conforme a sua veracidade se instituisse empírica ou dedutivamente. [40, p. 12]

Mas podemos supor que essa conversão do saber geométrico, de um corpo de regras empíricas em um corpo de juízos sequencialmente articulados, tenha sido contemporânea com a instituição da pólis na cultura helênica e com a concomitante ascensão da palavra, o *logos*, a ferramenta de poder: “A arte política é essencialmente um exercício da linguagem; e o *logos*, na origem, toma consciência de si mesmo, de suas regras, de sua eficácia, através de sua função política.” [13, p. 17][43, p. 35]

Para ensinar a técnica de uso da palavra, surgiram os sofistas, mestres da retórica, e, dentre eles, o *arquissofista* Sócrates (apelido dado pelo poeta cômico Aristófanes). Platão, pensador helênico do quarto século a.C., no diálogo *Laques*, atribuiu a Sócrates a invenção “de uma coisa nova que, vinte e quatro séculos depois, seria denominada o *conceito*”. [13, p. 20]

A discussão de temas matemáticos por filósofos da cultura helênica, na época em que viveu Platão, constitui um fato surpreendente. Em seu diálogo *Menon*, Platão narra que seu antecessor, Sócrates, passando com um jovem, indagou como se poderia obter um quadrado cuja área fosse o dobro da área do quadrado cujos lados exibissem o comprimento L . Diante da resposta de que seria suficiente dobrar o comprimento dos lados ($2L$), Sócrates recorreu a um diagrama desenhado na areia com uma bengala, para mostrar que, dobrando o comprimento dos lados, produziríamos um quadrado cuja área equivaleria a quatro vezes a área do quadrado considerado inicialmente ($4L^2$). (Usando o nosso contemporâneo *modus loquendi*, podemos dizer que a área de um quadrado *não seja função linear* do comprimento de seus lados.)

E, recorrendo a outro diagrama, Sócrates demonstrou que, para obtermos um quadrado cuja área fosse o dobro da área do quadrado considerado, seria suficiente tomar como lado desse segundo quadrado uma das diagonais do primeiro quadrado.

Se me perguntassem qual foi o intento de Platão nesse diálogo, eu diria que ele nos advertia de que nem sempre nossas primeiras intuições sejam verdadeiras.

Por honestidade intelectual, cabe-me revelar que

muitos comentadores sustentam que Platão estivesse argumentando em favor da *anamnese* (doutrina cuja exposição é impertinente ao tema do presente escrito). Contudo, é estimulante perceber que, recentemente, o método didático adotado por Sócrates no citado diálogo, método esse denominado *maiêutica socrática*, vem sendo propugnado como ferramenta propedêutica da matemática. [45, p. 8]

De qualquer modo, citei esse passo da obra de Platão, para mostrar que, naquela época, discutir argumentos geométricos não fosse alheio à prática filosófica, sugerindo que a catalogação das hipóteses empiricamente confirmadas (catalogação essa que conjecturei no início deste escrito) já se encontrasse em uma fase avançada.

O citado modo de se articularem proposições apresenta dois aspectos. Em primeiro lugar, cada teorema, por se deduzir das proposições anteriores, se liberava de qualquer verificação empírica, reservada apenas às proposições primeiras, que, inicialmente, se escolheriam por sua evidência e por sua simplicidade. Em segundo lugar, a possibilidade de se obterem enunciados de proposições geométricas, independentemente da comprovação experimental, provocou um progresso muito mais rápido e permitiu que o acervo de enunciados se enriquecesse ao ponto de discorrer sobre noções cuja elaboração não se efetuaria no nível puramente empírico e cuja verificação seria inexequível empiricamente. [22, p. 120][40, p. 12]

Essa ausência de verificação empírica exigiu que o modo de argumentação fosse adequadamente sistematizado, sistematização essa que, talvez, fosse intensamente discutida na Academia de Platão de Atenas.

Com efeito, conta-se que, após escrever o diálogo *Protágoras*, no qual se opõem as opiniões desse filósofo e as de Sócrates, Platão se sentiu insatisfeito em apenas confrontar os supostos saberes de sofistas e de políticos e desejou encontrar base sólida para fundamentar o seu pensamento. Parecendo-lhe que os geômetras teriam algo por lhe oferecer, Platão viajou a Cirene (na costa africana), onde assistiu às preleções de Teodoro, o qual perseguia a classificação dos quadrados, conforme a comensurabilidade entre a grandeza do lado e a unidade. Em seguida, foi à Itália, onde estudou com Arquitas de Tarento, criador da teoria das médias proporcionais (a qual seria, posteriormente, exposta no tomo VIII dos *Elementos* de Euclides de Alexandria). [29, p. 103][33, p. 170, 182][38, p. 209]

Regressando a Atenas, Platão fundou a Academia,

onde se cultivaria a matemática, em oposição à escola de Isócrates, cujo ensino era dirigido à política. Na Academia ensinou o geômetra Teeteto de Atenas, que concluíra o estudo dos números irracionais desenvolvido por Teodoro de Cirene, descobrira o octaedro e o icosaedro e mostrara existirem apenas cinco sólidos regulares. (Essas teorias seriam, posteriormente, explicadas nos tomos X e XIII dos *Elementos* de Euclides.) [1, p. 64][33, p. 172, 188][38, p. 147]

O asserto de que Teodoro houvesse descoberto dois dos cinco poliedros regulares deve ser lido *cum grano salis*. Sabe-se que diversas substâncias se apresentam naturalmente em formas cristalinas, das quais algumas são regulares, como o hexaedro. Babor & Ibarz ensinam que o cloreto de sódio e o fluoreto de cálcio ocorrem na forma de hexaedro regular. [4, p. 84]

Por sua vez, do sulfeto de ferro (ou pirita, FeS_2), que se apresenta como dodecaedro, havia jazidas na Magna Grécia (sul da Itália). [42, p. 41–42] Isso nos leva a buscar a origem dos sólidos platônicos na mineração primitiva.

Também na Academia professou aulas o notável geômetra Eudoxo de Cnido, que elevou o nível de rigor nas demonstrações, criou a teoria das proporções (tomo V dos *Elementos* de Euclides) e elaborou o método de exaustão (tomo XII dos *Elementos*), baseado em um critério que permitiu refutar as aporias de Zenão de Élea. [1, p. 64][33, p. 175]

Vale lembrar que as supostas antinomias indicadas por Zenão de Élea (bem como as discussões conduzidas por diversos sofistas) lançavam dúvida acerca da adequação do raciocínio, expresso na linguagem, como ferramenta para se atingir a verdade. Tais discussões constituíam uma “arma dialética e destrutiva”, que “conturbava as primeiras especulações dos matemáticos acerca das relações no espaço ou no tempo, proibindo ao espírito humano alcançar a inteligência de uma quantidade pela medida das suas partes”. [11, p. 154]

No caso do argumento da dicotomia, por exemplo, Zenão afirmava que, a fim de transpor um percurso de comprimento L , o móvel teria de transpor, antes, a metade desse percurso (de comprimento $L/2$) e, antes de transpor a sua metade, teria de transpor a sua quarta parte (de comprimento $L/4$) etc. Daí pretendia concluir Zenão pela impossibilidade do movimento, conclusão essa constantemente contestada pela experiência. Ora, diriam os adeptos de Zenão, se a razão mostra que o movimento não existe e a experiência mostra que essa ilação é falsa, então a razão não é confiável.

Mas esse argumento de Zenão se reduzia, em úl-

tima instância, à suposição de que fosse infinita a soma da série $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$, opinião que, por suas consequências, pode causar admiração mas que é *facilmente confutável*.

Aliás, não é tão raro que alguns pensadores se ancorem em um erro para construir um argumento. Ainda no século XVII, o argumento de Zenão era retomado por diversos críticos da matemática, consoante informa Brunschvicg. [11, p. 154]

E Russell denunciou que os adeptos de Georg Hegel e os prosélitos de Henri Bergson, respectivamente, sob a égide da razão e da intuição, veneraram prejuízos defendidos por ignorantes da matemática. [38]

A impressão profunda que a matemática causou a Platão é patente no seu asserto de que é ignomínioso o desconhecimento da teoria das grandezas incomensuráveis, mal merecendo o qualificativo de humano aquele que a ignora. Também é sintomática a interdição ao ingresso na Academia daqueles que não se interessassem pela geometria. [27, p. 21][38, p. 209–210]

O recurso ao método axiomático

É possível que a Lógica houvesse nascido da observação, na Academia platônica, do método usado pelos matemáticos Arquitas, Teeteto e Eudoxo nas discussões acerca das propriedades aritméticas e geométricas. Assim, a Lógica teria origem empírica, entendendo-se por empírica qualquer atividade associada à experimentação. No caso vertente, experimentavam-se argumentos dedutivos.

Essa MINHA opinião não parece destoar do que asseriu Bruno Latour no seguinte excerto:

Os vocábulos *apodixe* e *epidixe* têm quase a mesma raiz etimológica e, por muito séculos, eram completamente indistinguíveis. Foram somente os filósofos platonicistas que, conformando sua linguagem pelo efeito persuasivo que resultava das demonstrações geométricas, introduziram na filosofia uma diferenciação radical entre um modo de se convencer (mediante demonstrações rigorosas), a *apodixe*, e outro modo que dependia de floreios de retórica, de sofística, de poética, da imaginação e de artifícios políticos, a *epidixe*. [28, p. 445–446]

Atribui-se a Aristóteles de Estagira, na obra *Primeiros Analíticos*, a sistematização inicial dos rudimentos da Lógica, qual seja, a teoria dos silogismos. Embora, com o descenso dos tempos, a construção da Lógica

tenha sofrido profunda modificação, parece ser permanente a ideia constitutiva, já patente nos escritos do Estagirita, de que a Lógica (formal) se ocupe das regras que permitem extrair-se conclusões válidas, independentemente do conteúdo semântico das premissas. Note-se que o vocábulo Lógica, na acepção da doutrina discutida por Aristóteles ao longo de sua obra *Organon* (reunião de escritos produzidos em diferentes datas), foi empregada, pela primeira vez, por Alexandro de Afrodísias, no começo do século III d.C.

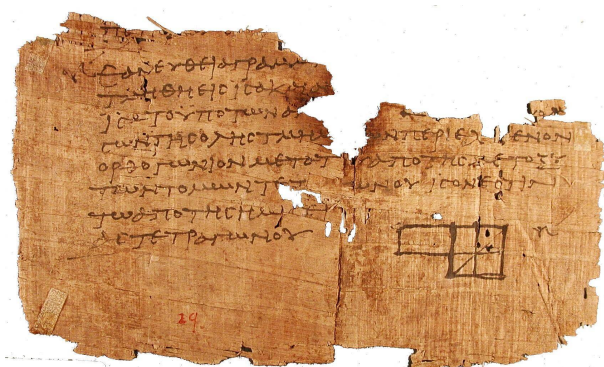
Na obra *Segundos Analíticos*, Aristóteles, possivelmente baseado no modelo da geometria o qual lhe era contemporâneo, definiu uma ciência dedutiva, notando que é impossível tanto definir tudo, quanto demonstrar tudo (pois uma tentativa de fazê-lo conduziria a um regresso *ad infinitum*). Por isso, esse autor helênico escolheu como primitivos os conceitos que dispensam definição (por ser patente o seu significado) e os juízos que prescindem de demonstração (por ser patente a sua veracidade).

Assim, segundo a visão do Estagirita, uma ciência dedutiva é um sistema *S* de termos e de enunciados tais, que

1. Todos os enunciados de *S* se referem a um mesmo domínio de objetos reais.
2. Todos os enunciados de *S* são verdadeiros.
3. Pertencem a *S* todos os enunciados que sejam consequência lógica de enunciados de *S*.
4. Existe em *S* um conjunto finito de termos cujo significado prescinde de explicação e mediante os quais se podem definir todos os outros termos de *S*. (*Conceitos primitivos*.)
5. Existe em *S* um conjunto finito de enunciados cuja veracidade é evidente e dos quais decorram todos os outros enunciados de *S*. (*Proposições primitivas*.) [17]

Afirmam os estudiosos da matemática helênica que os Elementos de Euclides (século III a.C.) tenham sido redigidos consoante a formulação descrita pelo Estagirita. Por exemplo, Evert Beth declarou que “a matemática clássica constitui o exemplo por excelência, e talvez o único exemplo, de uma teoria dedutiva, consoante a teoria das ciências de Aristóteles”. [8]

A obra de Euclides é iniciada com uma lista de definições, das quais a primeira consiste em asseverar que “*um ponto é aquilo que não tem partes*”. Essas definições não são logicamente operativas. Constituem apenas elucidações vagas, nas quais termos usados na enunciação dos postulados e dos teoremas são



Papiro Oxyrhynchus (P.Oxy. I 29) mostrando fragmento dos Elementos de Euclides.

parcialmente explicados mediante termos que não pertencem ao sistema.

Alguns críticos supõem que, ao propor tais definições, Euclides estivesse explicitamente declarando que, na composição dos *Elementos*, não seria adotada a concepção atômica esposada por Demócrito de Abdera.

Após as definições, Euclides expôs alguns enunciados primitivos, classificando-os em *axiomas* e *etemas* (termo grego equivalente ao termo latino *postulatus*). Os axiomas parecem tratar de fatos gerais (são juízos concernentes a qualquer espécie de grandeza), enquanto os postulados se referem a fatos específicos da ciência vertente (são juízos cuja veracidade é proposta no corpo do texto). Essa distinção entre os significados dos dois vocábulos esmaeceu ao longo dos séculos.

Eis os cinco axiomas e os cinco postulados de Euclides:

Axiomas

1. Coisas iguais a uma coisa são iguais entre si.
2. Se a coisas iguais foram somadas coisas iguais, as somas também serão iguais.
3. Se de coisas iguais forem subtraídas coisas iguais, os restos também serão iguais.
4. Coisas que coincidem entre si são iguais.
5. O todo é maior que suas partes.

Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado do qual estão os menores do que dois retos.

Existe um claro dissenso entre os escoliastas acerca da credibilidade das versões disponíveis dos *Elementos*.

Consoante Vincenzo De Risi,

os treze livros dos *Elementos* de Euclides, provavelmente, foram escritos no terceiro século a.C., coligindo materiais de uma tradição matemática mais antiga, e, certamente, sofreram diversas mudanças já na era helenística. Muitos séculos depois, o matemático Theon de Alexandria (quarto século da era cristã) preparou um edição dos *Elementos*, a qual teria enorme importância na tradição subsequente do texto. Contudo, as cópias mais antigas disponíveis dos *Elementos* são cópias de manuscritos bizantinos que remontam ao início do século nono. Manuscritos gregos posteriores circularam entre os eruditos durante o Renascimento e, de fato, constituíram o texto grego para as primeiras edições do escrito de Euclides no mundo moderno. [37, p. 595]

Euclides foi particularmente feliz na formulação do seu quinto postulado (ou quinto etema), o qual, enunciado apenas após o teorema I.27, incomodou longamente os matemáticos subseqüentes que se detiveram no exame do ordenamento das proposições. Se houvesse apresentado o quinto postulado anteriormente, Euclides teria simplificado alguns argumentos.

Desde o século I a.C., houve tentamentos em se demonstrar o quinto etema de Euclides, os quais repousavam na admissão (tácita ou explícita) de outros postulados. [9, p. 2]

Proclo de Constantinopla (comentador do século V d.C.) sustentava dever o quinto postulado de Euclides ser excluído do elenco de postulados, por ser um teorema (cuja demonstração já teria sido tentada por Ptolemeu). [14, p. 68]

Por outro lado, a proposição I.27 dos *Elementos* é o teorema: “São paralelas duas retas que, interseca-

das por uma terceira, formam com essa última ângulos alternos internos suplementares.”

Intensamente perplexo, Proclo perguntava: “Pode uma proposição ser um teorema e, simultaneamente, pode sua recíproca ser um postulado?”

Dúvidas dessa natureza suscitaram a busca de um critério que permitisse reconhecer se um enunciado apresentasse o caráter de axioma ou de teorema. Foi no contexto dessas discussões que nasceu a noção de *postulados independentes*, isto é, de postulados que integram um sistema que empobrece, se algum dos postulados for excluído. Isso significa que nenhum dos postulados pode ser deduzido dos outros. A um enunciado dedutível dos outros chamamos *postulado redundante*. A um sistema axiomático composto apenas de postulados independentes chamamos *sistema irreduzível*. [31, p. 131][39, p. 985]

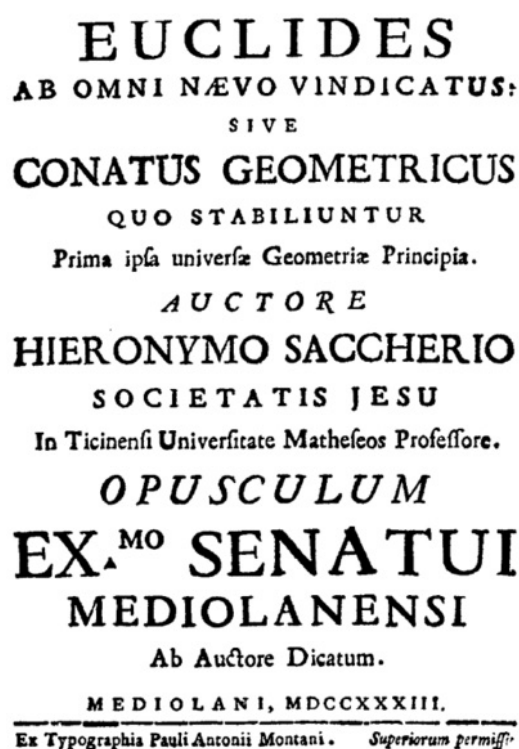
Note-se que, ao longo de toda essa discussão, não se pôs em dúvida a veracidade do sistema geométrico erigido por Euclides de Alexandria. O questionamento incidia apenas sobre o modo de se escolherem os postulados.

Mas, com o passar dos séculos, também se passou a suspeitar que fosse possível construir-se outros sistemas de axiomas geométricos.

Na verdade, um tal sistema já fora construído por Menelaus (*circa* 100 d.C.), ao estudar a geometria sobre a superfície esférica. Talvez por tal esfera estar imersa no espaço usualmente descrito pelo sistema euclidiano, não se reconheceu que a geometria intrínseca da esfera constituísse um novo modelo de geometria planar. [42, p. 57]

Dentre os tentamentos em se demonstrar o quinto postulado de Euclides o mais notável foi conduzido por Gerolamo Saccheri, que recorreu ao método denominado *reductio ad absurdum*, aplicado à figura obtida, quando se traçam, pelas extremidades de um segmento de reta AB , as perpendiculares r e s e, sobre essas retas, no mesmo semiplano, se marcam os segmentos congruentes AC e BD . Saccheri mostrou (recorrendo aos critérios de congruência de triângulos) que são congruentes os ângulos $\angle ACD$ e $\angle BDC$ e considerou os três casos: (a) Ambos os ângulos são agudos. (b) Ambos os ângulos são retos. (c) Ambos os ângulos são obtusos.

Em seguida, Saccheri mostrou que a segunda hipótese implicasse o postulado de Euclides e tentou mostrar que as duas outras hipóteses fossem falsas. Na verdade, seu tentamento em mostrar a falsidade das duas outras hipóteses produziu enunciados de um sistema geométrico distinto do euclidiano, os quais Saccheri, falaciosa mas indolentemente, supôs serem



Página de rosto de *Euclide Ab Omni Naevo Vindicatus* (Euclides livre de qualquer falha), de Girolamo Saccheri, de 1733

impossíveis. [26, p. 182]

Coube a Nikolai Lobachevski a glória de haver composto, em 1826, o primeiro estudo explícito de um sistema geométrico distinto do adotado até então². Lobachevski iniciou seu trabalho, recorrendo também à *reductio ad absurdum*, pelo tentamento em demonstrar o enunciado que Euclides expusera como o quinto postulado, mediante o uso explícito do argumento seguinte: Sejam A o quinto postulado de Euclides e B um juízo que se obtém a partir de $\neg A$ (a *negação* de A). Se B for incompatível com o sistema axiomático que se obtém, excluindo-se o quinto postulado do sistema de Euclides, então também $\neg A$ será incompatível com tal sistema. Isso comprovaria A . [5, p. 29][25, p. 388][40, p. 13–14]

Para sua surpresa, Lobachevski não obteve nenhum enunciado que contradissesse o sistema geométrico de Euclides. Isso sugeria que o quinto postulado fosse efetivamente um enunciado independente dos demais enunciados do sistema euclidiano.

Assim, Lobachevski foi precursor do método de verificação da independência de um enunciado α relati-

²Essa glória é compartilhada com o matemático húngaro János Bolyai, que também desenvolveu, de maneira independente, um sistema não euclidiano em meados da década de 1820, o qual foi publicado em 1831. (N. do E.)

vamente a um sistema axiomático Γ . Tal método consiste em exibirem-se modelos de estruturas que satisfaçam ou a $\Gamma \cup \{\alpha\}$ ou a $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$.

Em oposição ao sistema de Euclides, o sistema axiomático obtido pela substituição do quinto postulado pelo asserto de que existem diversas retas paralelas a uma mesma reta por um mesmo ponto foi denominado *não euclidiano* por Carl Gauss, em uma carta de 8 de novembro de 1824. [6, p. 39]

Incumbe notar que os qualificativos anti-euclidiano e não-euclidiano, empregados, inicialmente, por Gauss para designar sistemas de postulados geométricos distintos do sistema euclidiano, não têm caráter matemático mas tão somente sabor histórico. De fato, como até então somente se conhecesse o sistema euclidiano (que então era descrito simplesmente como *a geometria*), os novos sistemas receberam tais qualificativos por oposição ao sistema geométrico já estabelecido (e, desde então, o sistema previamente instituído também recebeu o qualificativo de *euclidiano*).

Mas tal episódio constituiu apenas uma vicissitude ou uma contingência histórica e não um critério classificativo. Creio que, já em 1871, Felix Klein estava fortemente convencido disso pois, nesse ano, escreveu sobre “*a assim denominada geometria não euclidiana*” [*die sogenannte nicht-euklidische Geometrie*]. [9, p. 67][46, p. 214]

Contudo, o problema da consistência não fora resolvido. Bolyai e Lobachevski, efetivamente, não encontraram contradições em seus incursos por esse novo domínio. Mas nada certificava que, no futuro, não se manifestassem tais contradições. E assim foi suscitado *o problema da consistência*. [25, p. 388]

Baseando-se em uma memória de Eugenio Beltrami, Jules Houël (1869-1870) ofereceria a primeira solução ao problema da consistência do sistema de Lobachevski, construindo-lhe um modelo euclidiano. Com efeito, Beltrami havia mostrado que os teoremas obtidos por Lobachevski eram verificados em uma superfície de curvatura constante negativa. [22, p. 320–321][12, p. 32–33]

Nessas condições, a qualquer contradição na geometria de Lobachevski corresponderia uma contradição na geometria de Euclides. E assim também mostrou que não se poderia provar o quinto postulado de Euclides, já que tal prova implicaria a falsidade do postulado correspondente de Lobachevski. A esse tipo de solução do problema da consistência chamou-se *prova relativa de consistência*. [25, p. 388][19, p. 325]

A segunda solução seria dada por Felix Klein, em

1871, ao mostrar que a geometria de Bolyai e Lobachevski poderia ser considerada como uma geometria projetiva com uma métrica de Cayley. Assim, “se houvesse incongruências na geometria de Bolyai e Lobachevski, também se poderiam encontrar incongruências na geometria projetiva e poucos matemáticos estavam dispostos a admitir tal heresia”. [42, p. 178]

Também o argumento de Klein constituiu uma prova relativa de consistência da geometria de Bolyai e Lobachevski.

Impuseram-se, assim, dois novos problemas: a prova de consistência da geometria euclidiana e a prova de consistência da geometria projetiva. Ambos esses problemas podem resumir-se nas palavras atribuídas a Henri Poincaré: “Para preservar dos lobos um rebanho, não é suficiente guardá-lo no redil; é necessário verificar, além disso, que, no redil, não existe lobo algum.” [3, p. 59]

Um avanço na solução desses novos problemas foi obtido por Moritz Pasch que, nas *Preleções sobre a nova geometria* [*Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882)], mediante a escolha judiciosa dos conceitos e dos juízos primitivos, tentou “fundar empiricamente a geometria”. [35, p. 151]

Consoante a interpretação por da Costa, Pasch “apresentou uma sistematização precisa da geometria comum como disciplina física”. [17, p. 193]

Nessa obra, assim se exprimia Moritz Pasch:

Se quisermos que a geometria seja verdadeiramente dedutiva, o processo dedutivo deverá ser totalmente independente do significado [Sinn] dos conceitos geométricos assim como deverá ser independente das figuras. Somente as relações entre os conceitos geométricos que houverem sido explicitadas nas proposições e nas definições adotadas deverão ser consideradas. É verdade que, no curso de uma dedução, seja permitido e útil conservar no espírito a referência [*Bedeutung*] dos conceitos geométricos empregados mas isso não é absolutamente necessário. [10, *apud*, p. 283][20, *apud*, p. 654]

Ao propor axiomas para a geometria projetiva, Pasch acentuou, pela primeira vez, a relevância das noções não definidas explicitamente. [24, p. 859]

Contudo, não parece adequado considerar a obra de Pasch apenas como um passo na transição da formulação contida nos *Elementos* do alexandrino para a obra de Hilbert. Adverte Gandon que as *Vorlesungen* de Pasch são o ponto culminante da tradição em geometria projetiva sintética inaugurada por Poncelet. [20, p. 655–656] É notável que, ainda em 1890,

10. Lehrsatz. — Sind A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte, D ein Punkt der Geraden AB zwischen A und B , g eine Gerade in der Ebene ABC , welche durch D , aber durch keinen der Punkte A, B, C hindurchgeht, so begegnet g entweder der Geraden AC zwischen A und C oder der Geraden BC zwischen B und C .

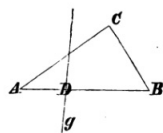


Fig. 6.

Wir werden uns künftig weder auf die Grundsätze noch auf den ersten Lehrsatz dieses Paragraphen berufen. Von den neun übrigen Lehrsätzen sind 5.–8. Folgerungen aus 2.–4. Bezüglich des zehnten ist derselbe Vorbehalt zu machen, wie bezüglich des achten Lehrsatzes in § 1.

Noch mögen hier einige Folgerungen Platz finden, die sich an den 10. Lehrsatz anschließen.

Axioma de Pasch, extraído de suas “Preleções”: Se A, B, C são três pontos que não estão em linha reta, D é um ponto na reta AB entre A e B , g é uma reta no plano ABC que passa por D , mas não por qualquer dos pontos A, B e C , então g encontra a reta AC entre A e C ou a reta BC entre B e C . Os postulados de Euclides são insuficientes para mostrar esse fato tão simples.

Felix Klein recusasse a opinião de que, formulados os fatos da intuição espacial mediante axiomas adequadamente escolhidos, se tornasse supérfluo qualquer recurso ulterior à intuição:

Para concluir, teço ainda algumas considerações gerais sobre a essência dos axiomas geométricos. Parece-me que, a esse respeito, pelo menos na literatura matemática, se dissemina uma opinião, distinta da que me parece correta [...]. Essa opinião consiste em supor que os axiomas formulem os fatos da intuição espacial e, na verdade, o façam tão completamente que, nas considerações geométricas, seja desnecessário recorrer à intuição desses fatos; pelo contrário, que seja suficiente reportar-se aos axiomas. Desejo, antes de tudo, contestar a segunda parte dessa premissa. Para mim é impossível, em qualquer caso, conduzir uma reflexão geométrica de um modo puramente lógico, sem ter diante dos olhos a figura a respeito da qual se cogite. [23, p. 380–381]

E, com respeito à primeira parte da premissa, afirma Klein:

No artigo sobre o conceito geral de função [...], expliquei detalhadamente (e nisso concordo com o sr. Pasch) que considero a intuição espacial como alguma coisa essencialmente imprecisa, quer se trate da intuição abstrata, que se torna familiar pela habitação, quer se trate da intuição concreta,

que se impõe pela observação empírica. Por isso, o axioma é para mim a exigência, em virtude da qual se introduzem atributos precisos na intuição imprecisa. Já em uma reflexão geométrica, penso eu, devemos continuamente contemplar a figura vertente e, em cada ocasião na qual conduzimos um raciocínio mais arguto, devemos reportar-nos aos axiomas como firme substrato lógico. [23, p. 381]

Nos *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare* (1891), Giuseppe Veronese defendia que “toda consideração geométrica deva ser interpretada no sentido de que esteja a figura perante os olhos.” [10, *apud*, p. 301]

Esses assertos peremptórios parecem tanto mais significativos, porque, quase duas décadas antes, na prefácio ao ensaio sobre a *Continuidade e os números irracionais*, Richard Dedekind advertira na necessidade de “um fundamento puramente aritmético e perfeitamente rigoroso dos princípios da análise infinitesimal”. É possível que Dedekind não conhecesse a obra de Bernard Bolzano, o precursor de todos esses estudos. [18, prefácio, p. III] E, também, mais próximo sobretudo de Veronese, Giuseppe Peano sustentara uma concepção radicalmente oposta sobre o papel da intuição, nos “*Principii di geometria logicamente esposti*” (1889). Peano acentuara que, embora as linguagens da geometria e da análise fossem, até certo ponto, conversíveis uma na outra, não seria lícito ao analista recorrer apenas à intuição para demonstrar fatos da análise. Lembremos que, nesse mesmo ano de 1890, mediante o exemplo de uma curva, definida no intervalo $[0, 1]$, que preenche completamente um quadrado, Peano mostrou convincentemente que conclusões intuitivamente evidentes poderiam não ser válidas, se os conceitos envolvidos fossem idealizados teoricamente. [26, p. 143]

Também em 1891, Gino Fano apresentou, em *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva*, o resultado de sua perquisição sobre um conjunto mínimo de hipóteses suficiente para fundar a geometria projetiva em um espaço de n dimensões. [10, p. 30]

Em 1894, Federigo Enriques, em “*Sui fondamenti della geometria proiettiva*”, enfatizou que uma geometria abstrata pode admitir diversas interpretações. Por exemplo, a geometria planar abstrata se pode interpretar tanto como a geometria intuitiva sobre o plano quanto como a geometria sobre uma superfície desenvolvível³; e a geometria projetiva abstrata do es-

³ou *desenvolvível*, ou seja, uma superfície desenvolvível é um

paço se pode interpretar tanto como uma geometria dos sistemas lineares de curvas planares algébricas de uma dada ordem, quanto como uma geometria das involuções de ordem superior a 2, de terceira espécie, sobre a reta. [10, p. 312]

Finalmente, após apresentar quatro ensaios desde 1894, Mario Pieri compôs os “*principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo*” (1899), nos quais forneceu uma completa apresentação axiomática da geometria projetiva. [26, p. 226–227] [10, p. 317]

Em seguida, David Hilbert publicou seus *Fundamentos da geometria* [*Grundlagen der Geometrie*, 1899], instaurando definitivamente a concepção de um sistema de postulados como definição implícita, concepção essa introduzida por Gergonne (1819) e praticada por Peano, Enriques e Pieri.



David Hilbert publicou o livro *Grundlagen der Geometrie* em 1899, colocando a geometria dentro de um arcabouço axiomático formal. O livro continuou a aparecer em novas edições e foi uma grande influência na promoção da abordagem axiomática à matemática.

Mediante esse método, se esvaziam as noções primitivas de qualquer conteúdo conceitual que não esteja implicado pelos postulados, cujos vínculos mútuos deixam de ser encarados como apenas a expressão de sua interdependência. Em um certo sentido,

caso especial de superfície regrada com a propriedade de ter o mesmo plano tangente em todos os pontos de uma mesma geratriz. (N. do E.)

podemos dizer que a adoção das definições implícitas marcam a transição da *axiomática material* (proposta por Aristóteles) para a *axiomática formal*. [8, p. 115][25, p. 691][26, p. 201]

Esse trabalho de Hilbert mereceu uma resenha por Henri Poincaré, na qual esse insigne matemático francês comentou que fora denominada geometria geral uma exposição da qual se excluía o quinto postulado de Euclides mas na qual se conservaram todos os outros postulados. Acrescentou Poincaré não haver um bom motivo para se pensar que o citado postulado fosse o único susceptível de questionamento e comentou que muitos geômetras contemporâneos assim o pretendiam e que “esse termo geral indica claramente que, em suas mentes, não é concebível outra qualquer geometria. Perderão essa ilusão, se lerem o trabalho do prof. Hilbert. Nele descobrirão que as barreiras atrás das quais gostariam de se refugiar foram completamente fragmentadas”. [36, p. 77-78]

Hilbert estendeu os trabalhos de Peano e de Enriques, ao estudar sistematicamente a independência mútua dos axiomas, mediante a construção de modelos. Segundo essa técnica, constrói-se um modelo que contradiga um dos axiomas mas que satisfaz a todos os outros. Assim, fica provado que o axioma que foi contrariado pelo modelo não seja consequência dos outros axiomas.

Esse método já era praticado por alguns geômetras. Por exemplo, pouco antes do trabalho de Hilbert, Levi-Civita o aplicara no estudo da geometria não-arquimediana inventada por Veronese.

Embora desde Descartes e Fermat se conhecesse a correspondência entre os pontos de uma reta e o corpo dos números reais, foi Hilbert quem primeiro afirmou que a qualquer contradição verificada na formulação euclidiana da geometria corresponderia uma outra contradição na aritmética dos números reais. Para melhor tratar esse quesito, Hilbert propôs um conjunto simples e completo de axiomas para o corpo dos números reais.

Cabe realçar que o tratamento do quesito de independência mediante o recurso a modelos não seja logicamente concludente, pois apenas desloca o problema para outro lugar.

A esse propósito, é oportuno comentar o *quesito da plenitude*, propriedade de um sistema de postulados que consiste na possibilidade de que qualquer proposição nos termos da teoria vertente (ou acerca dos objetos sobre os quais a teoria versa) se possa obter por inferência, desde os axiomas. Ao nível do tratamento por modelos, a *plenitude* é substituída pela *categoricidade*, introduzida por Veblen, em sua tese de 1903 (A

system of axioms of Euclidean geometry), na qual, aparentemente, o autor trilhou uma trajetória mais próxima de Pasch e Peano que de Hilbert e Pieri).

A categoricidade de um sistema de postulados foi definida por Veblen como a isomorfia entre todos os possíveis modelos e o modelo mediante o qual é instituída a consistência do sistema considerado. [44, p. 638]

Pouco depois da publicação dos Fundamentos da geometria de Hilbert, Gottlob Frege lhe escreveria uma carta (datada de 27 de dezembro de 1899), submetendo o citado livro a uma crítica severa. Como qualquer referência a Frege evoque, frequentemente, a imagem do lógico rigoroso, devo consignar, para permitir uma melhor contextualização, que o seu *Inauguralschrift*, intitulado *Sobre a representação geométrica das configurações imaginárias no plano* [*Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene*, 1873], fosse dedicado à geometria projetiva complexa. [7, p. 383]

Dois dias depois, Hilbert responderia a essa carta, esclarecendo que a pesquisa sobre o método axiomático não era, para ele, um objeto que se justificasse inerentemente mas, antes, um instrumento que lhe permitisse obter um entendimento mais claro das teorias matemáticas. Nessa missiva, Hilbert afirmaria que, “se axiomas dados arbitrariamente não se contradissem em todas as suas consequências, então eles seriam verdadeiros e os objetos por eles definidos existiriam”. E concluiria que, para ele, Hilbert, esse seria o critério de existência e de veracidade. [15, p. 117]

Na sua réplica, Frege declarou lhe parecer que Hilbert quisesse “desvincular a geometria da intuição espacial e convertê-la em uma ciência puramente lógica, como a Aritmética”. Nessa imputação, percebemos o eco da carta de Gauss a Olbers (de 28 de abril de 1817), na qual o príncipe dos geômetras afirmara que a geometria não se encontrasse na mesma categoria que a Aritmética (a qual era inteiramente *a priori*) mas, antes, na vizinhança da Mecânica. [15, p. 117][33, p. 113][7, p. 382]

Hilbert apenas acusou o recebimento da réplica mas não se estendeu na resposta, alegando estar oprimido de tarefas. Na verdade, Hilbert poderia haver respondido que a axiomatização completa da geometria permitiria que *todos os teoremas fossem deduzidos sem recurso à intuição*. Mas, para Hilbert (assim como, antes dele, para Pasch), os próprios axiomas não estariam desconectados da intuição espacial. Pelo contrário, os axiomas seriam escolhidos de tal modo que capturassem e recolhessem integralmente

os dados da intuição espacial. Assim, somente a dedução dos teoremas seria independente da intuição espacial. [15, p. 117]

Embora esporadicamente tornasse a discorrer sobre o método axiomático (como na palestra *Axiomatisches Denken*, proferida em Zurique, em 1917), nos anos iniciais do século XX, Hilbert se deixaria absorver, primeiramente, pelas equações integrais e, pouco depois, pela física que, desde 1916, seria intensamente revigorada pela teoria geral da relatividade.

Tomando como referência o ano de 1941, no qual foi publicada a primeira edição do livro *A survey of modern algebra*, por Garrett Birkhoff & Saunders Mac Lane, podemos dizer que o método axiomático se tenha tornado um ingrediente essencial dos textos didáticos.

Com efeito, os principais conceitos da álgebra, tais quais *grupos, anéis, corpos, espaços vetoriais e grafos* são, hoje em dia, definidos sob a forma axiomática. Outro tanto ocorre aos conceitos da topologia, como *espaços métricos e espaços topológicos*.

Parece-me oportuno concluir essa dissertação com uma advertência feita por Michael Atiyah⁴ em uma entrevista concedida a Roberto Minio [30, p. 11]:

Axiomas destinam-se a insular temporariamente uma classe de problemas para os quais você pretende elaborar técnicas de solução. Algumas pessoas entendem que axiomas sejam um recurso para se definir toda uma área da matemática que contém a si mesma. Penso que isso seja errado. Quanto mais estritos forem os axiomas, tanto mais você estará excluindo.

Quando abstraímos alguma coisa em matemática, estamos distinguindo aquilo em que nos queremos concentrar daquilo que consideramos irrelevante. Isso pode ser adequado durante um interstício de tempo: permite que nos concentremos mentalmente. Porém, por definição, se excluimos um conjunto de coisas nas quais não estamos interessados, em um procedimento completo, eliminamos um conjunto de raízes. Se pudermos desenvolver alguma coisa axiomáticamente, deveremos em alguma fase retornar a sua origem e provocar a fertilização cruzada. Isso é saudável.

⁴Michael Atiyah recebeu a medalha Fields no Congresso Internacional de Matemática em Moscou, de 1966. Seus trabalhos de pesquisa se expandem através da topologia, da geometria, das equações diferenciais e da física matemática.

Encontramos pontos de vista semelhantes a esse expressos por von Neumann e Hermann Weyl, há cerca de trinta anos. Eles se preocupavam com o caminho que a matemática poderia estar seguindo; se ela se afastasse muito de suas fontes, então poderia se tornar estéril. Eu acho que isso é fundamentalmente correto.

Bibliografia

- [1] Asger Aaboe. *Episódios da história antiga da matemática*. Blucher, 1984.
- [2] William Anglin and Joachim Lambek. *The heritage of Thales*. Springer, 1995.
- [3] José Babini. *Historia de las ideas modernas en matemática*. EUDEBA, 1974.
- [4] Joseph A. Babor and José Ibarz. *Química general moderna*. Editorial Labor, 1960.
- [5] Gaston Bachelard. *Le nouvel esprit scientifique*. Presses Universitaires de France, 1934.
- [6] João L. Marques Barbosa. *Geometria hiperbólica*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 1995.
- [7] Jean-Pierre Belna. *Frege et la géométrie projective: La Dissertation inaugurale de 1873*. Vrin, 2002.
- [8] Evert Beth. *Les fondements logiques des mathématiques*. Presses Universitaires de France, 1955.
- [9] Roberto Bonola. *Non-Euclidean geometry*. Dover Publications, 1906.
- [10] Umberto Bottazzini. *I geometri italiani e il problema dei fondamenti (1889-1899)*. Unicopli, 2001.
- [11] Léon Brunschvicg. *Les étapes de la philosophie mathématique*. Presses Universitaires de France, 1972.
- [12] Manfredo Perdigão do Carmo. *Geometria riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 1988.
- [13] François Châtelet. *Uma história da razão*. UNESP, 1994.
- [14] Julian Lowell Coolidge. *A history of geometric methods*. Oxford University Press, 1940.
- [15] Leo Corry. David Hilbert and the axiomatization of physics (1894–1905). *Archive for History of Exact Sciences*, 1997.
- [16] Leo Corry. The empiricist roots of Hilberts axiomatic approach. *Science in Context*, 1997.
- [17] Newton Carneiro Affonso da Costa. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. Hucitec, 1994.
- [18] Richard Dedekind. *Continuity and irrational numbers*. Open Court Publishing, 1872.
- [19] Adolf Abraham Fraenkel. Filosofia da matemática. In *Heinemann*, pages 321–344. Heinemann, 1993.
- [20] Sébastien Gandon. *Pasch entre Klein et Peano: empirisme et idéalité en géométrie*. Vrin, 2005.
- [21] Fritz Heinemann. *A filosofia no século XX*. Edições 70, 1993.
- [22] V. F. Kagán. *Lobachevski*. Mir Publishers, 1986.
- [23] Felix Klein. *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie*. Friedrich Vieweg und Sohn, 1890.
- [24] Kleiner. Field theory: From equations to axiomatization (part II). *Archive for History of Exact Sciences*, 1999.
- [25] William Kneale and Martha Kneale. *The Development of Logic*. Oxford University Press, 1962.
- [26] G. T. Kneebone. *Mathematical logic and the foundations of mathematics*. Van Nostrand Reinhold, 1963.
- [27] Cornelius Lanczos. *Space through the ages*. Academic Press, 1970.
- [28] Bruno Latour. *The shaping of deduction in Greek mathematics: A study of cognitive history*. Harvard University Press, 2008.
- [29] Diógenes Laércio. *Vidas e doutrinas dos filósofos ilustres*. Edições 70, 1988.
- [30] Roberto Minio. An interview with Michael Atiyah. *The Mathematical Intelligencer*, 6(1), 1984.
- [31] Edwin Moise. *Elementary geometry from an advanced standpoint*. Addison-Wesley, 1963.
- [32] Arnaldo Momigliano. *Os limites da helenização*. Edusp, 1991.

FILME



O filme apresenta a construção da bomba de Hidrogênio que se deu em paralelo a construção e utilização da bomba atômica no Japão. Além disso, destaca os desafios do trabalho em conjunto entre o matemático Stanislaw Ulam e do físico Edward Teller. Na oportunidade, Ulam questiona o uso da ciência como mecanismo de extermínio de guerra.

Lançamento: 2021
Direção: Thor Klein
Duração: 1h 42min

12

LIVRO



Antes de vir a órbita, o matemático francês, Pierre de Fermat deixou diversos problemas em aberto, dentre esses, o que se popularizou como o Último Teorema de Fermat.

Na margem de um livro, Fermat escreveu o teorema e afirmou conhecer uma demonstração para tal, justificando que não a faria pela ausência de espaço para expandir a demonstração. Assim, o livro o “Último Teorema de Fermat”, escrito pelo autor e jornalista Simon Singh, apresenta de maneira leve, os desafios enfrentados por aqueles que ousaram a debruçar-se no desafio, rumo a demonstração do teorema.

Publicação: Editora Best Seller, 326 p.
Autoria: Simon Singh
Idioma: Português

ANIMAÇÃO



A animação apresenta algumas curiosidades sobre o número PI (π) e as motivações a cerca da sua comemoração. De maneira leve e descontraída, o professor Albert e Saturnina apresentam, ainda, uma aplicação muito famosa e importante do uso do número PI.

Lançamento: Julho de 2016
Duração: 3 min e 40s



Sugestões culturais compiladas por Taíse Jorge.

- [33] Jesús Mosterín. *La filosofía griega pré-aristotélica*. Alianza Editorial, 1984.
- [34] Michael Otte. *Proof analysis and continuity*. Springer, 2006.
- [35] Moritz Pasch. *Begriffsbildung und Beweis in der Mathematik*. Springer, 1924.
- [36] Henri Poincaré. Foundations of geometry, by David Hilbert. Resenha. *Bulletin des sciences mathématiques*, 1999. [1903-1904].
- [37] Vincenzo De Risi. *The development of Euclidean axiomatics*. Springer, 2016.
- [38] Bertrand Russell. *A history of western philosophy*. George Allen & Unwin, 1945.
- [39] Michael Scanlan. Beltramis model and the independence of the parallel postulate. *Historia Mathematica*, 1988.
- [40] A. S. Smogorzhevski. *Lobachevskian geometry*. Mir Publishers, 1976.
- [41] D. M. Y. Sommerville. *The elements of non-euclidean geometry*. Dover Publications, 1958.
- [42] Dirk J. Struik. *A concise history of mathematics*. Dover Publications, 1987.
- [43] Jean-Pierre Vernant. *As origens do pensamento grego*. Difel, 1984.
- [44] Hermann Weyl. *David Hilbert and his mathematical work*. Duke University Press, 1944.
- [45] Heinrich Winand Winter. *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Aulis Verlag, 1989.
- [46] I.M. Yaglom. *Felix Klein and Sophus Lie*. Birkhäuser, 1990.



Marcelo Papini exerceu o magistério no Departamento de Matemática, desde 1982, após concurso para o cargo de professor auxiliar, sendo aposentado compulsoriamente em 2013. Obteve o doutoramento no programa de pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, mantido pela UFBA conjuntamente com a UEFS, com uma *Contribuição ao estudo histórico e crítico do pensamento matemático*.

TÉCNICA

Caminhando por Sequências de Farey

Carlos Augusto D. Ribeiro

Introdução

Este artigo foi inspirado pelo Problema 6 da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e da Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária (OBMU) de 2024. Durante a pesquisa por materiais de referência em português sobre as sequências de Farey, tornou-se evidente a escassez de artigos ou publicações que tratassem do tema de forma acessível e aprofundada. A maioria do conhecimento disponível está restrita a artigos e livros em inglês, limitando o acesso a estudantes e entusiastas da matemática sem fluência nesse idioma.

Com isso, este artigo pretende preencher essa lacuna, reunindo resultados e conceitos de diversas fontes em inglês e organizando-os de forma clara e didática. O objetivo principal é fornecer um material útil tanto para matemáticos amadores curiosos quanto para estudantes avançados envolvidos em olimpíadas de matemática. As sequências de Farey são um tópico rico em propriedades e padrões interessantes, com aplicações que transcendem a teoria dos números, alcançando áreas como geometria e aproximação de números irracionais. Espero que este material inspire o interesse e expanda o horizonte matemático de todos os que explorarem estas páginas.

A História Peculiar das Sequências de Farey

A história das sequências de Farey é marcada por uma curiosa reviravolta, envolvendo um geólogo, um ma-

temático renomado e um matemático menos conhecido. A sequência leva o nome de John Farey, um geólogo inglês que, em 1816, publicou um artigo intitulado “On a curious property of vulgar fractions” na revista *Philosophical Magazine*. Neste artigo, Farey observou um padrão interessante nas frações entre 0 e 1, organizadas em ordem crescente e com denominadores limitados por um determinado valor. Ele descreveu como construir a sequência, listou os termos da sequência de ordem 5 como exemplo e questionou se a propriedade já havia sido observada ou demonstrada anteriormente.

Um dos leitores do artigo de Farey foi ninguém menos que Augustin-Louis Cauchy, um dos matemáticos mais proeminentes da época. Cauchy, impressionado pela observação de Farey, forneceu uma demonstração rigorosa da propriedade no mesmo ano. A partir de então, a sequência passou a ser conhecida como “sequência de Farey”, consolidando o nome de Farey na história da matemática.

A ironia, porém, é que Farey não foi o primeiro a descobrir as propriedades da sequência. Charles Haros, um matemático menos conhecido, já havia, em 1802, identificado a propriedade e até mesmo explicado como construir a 99ª sequência. Infelizmente para Haros, seu trabalho não recebeu o reconhecimento devido na época, e ele acabou sendo ofuscado pela publicação de Farey.

O caso das sequências de Farey ilustra como a história da matemática, assim como outras áreas do conhecimento, pode ser permeada por acasos e injustiças. Farey, apesar de sua contribuição modesta, acabou imortalizado por uma descoberta que não era

originalmente sua. Em *A Mathematician's Apology*, G. H. Hardy comenta ironicamente: "... Farey é imortal porque não conseguiu entender um teorema que Haros havia provado perfeitamente quatorze anos antes..."

Apesar da controvérsia em torno da autoria das descobertas sobre suas propriedades, as sequências de Farey passaram a ser estudadas na teoria dos números, com diversas aplicações, incluindo a aproximação racional de números irracionais e contribuições importantes à geometria.

Construção das Sequências de Farey

Em todos os resultados, demonstrações e soluções daqui em diante, assumiremos que as frações estão em sua forma irredutível, salvo indicação em contrário. Existem diversas formas de introduzirmos as sequências de Farey, desde uma definição pragmática até a construção de diagramas onde os andares nos dão a respectiva sequência de ordem n .

Para fins didáticos, iniciemos com o algoritmo para a construção, que nos levará a um diagrama, e por fim chegaremos à definição limpa e direta. Começamos com a sequência de ordem 1, representada por:

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Para construir a sequência de ordem n , denotada por F_n , a partir da sequência de ordem $n-1$, denotada por F_{n-1} , siga os seguintes passos de forma detalhada:

1. Inicialize a nova sequência:

- Comece copiando todos os elementos da sequência F_{n-1} para uma nova sequência, que chamaremos de F_n . Assim, a nova sequência F_n inicialmente é uma cópia de F_{n-1} .

2. Calcule e insira as mediantes:

- Para cada par de frações consecutivas $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ em F_{n-1} , calcule a fração mediana entre elas, dada pela fórmula:

$$\text{Mediante} = \frac{a + a'}{b + b'}.$$

- A fração mediana é obtida somando os numeradores e os denominadores das frações consecutivas.

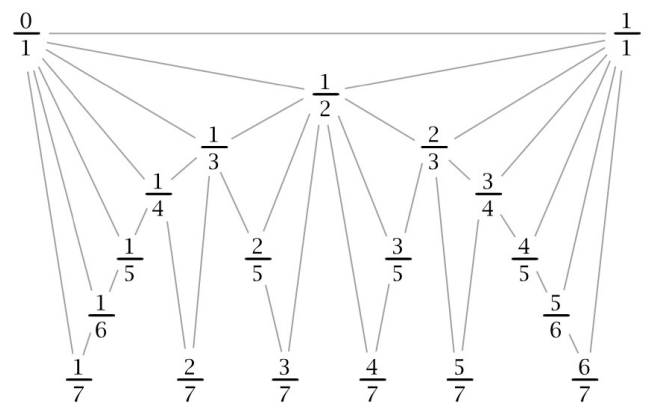
3. Verifique a condição do denominador:

- Após calcular a fração mediana $\frac{a+a'}{b+b'}$, verifique se o denominador resultante, $b + b'$, é menor ou igual a n . Isto é importante, pois queremos limitar o tamanho do denominador para garantir que a sequência F_n respeite a ordem definida.
- Se a condição $b + b' \leq n$ for satisfeita, então a fração mediana deve ser inserida entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ na sequência F_n .
- Caso contrário, se $b + b' > n$, a fração mediana não é adicionada, e seguimos para o próximo par de frações consecutivas em F_{n-1} .

4. Concluindo a construção da sequência:

- Repita o processo para todos os pares consecutivos de frações em F_{n-1} . Ao final, a sequência F_n estará completa, contendo tanto as frações da sequência anterior quanto as novas frações mediantes que foram inseridas, respeitando o limite do denominador.

De forma geral, esse processo pode ser resumido no diagrama a seguir:



Finalmente, uma definição direta da sequência de Farey de ordem n :

Definição. A sequência de Farey de ordem n , denotada por F_n , é o conjunto de frações racionais $\frac{r}{s}$, onde $0 \leq r \leq s \leq n$, com $\text{mdc}(r, s) = 1$, dispostas em ordem crescente, incluindo os extremos $0 = \frac{0}{1}$ e $1 = \frac{n}{n}$.

Cabe observar que cada elemento da sequência de Farey é uma fração irredutível cujo denominador é menor ou igual a n . Além disso, a sequência F_n contém todas as frações que podem ser formadas nesse intervalo, de modo que frações consecutivas satisfaçam a condição de estarem na menor forma e ordenadas de maneira crescente.

Propriedades básicas

Nesta seção, começamos explorando a relação fundamental entre frações consecutivas, descrita pelo Teorema da Vizinhança de Farey (TVF). Este teorema nos fornece uma condição necessária e suficiente para que duas frações sejam vizinhas em uma sequência de Farey de ordem n . Tal critério é extremamente útil, pois permite identificar quais frações são mais próximas em termos de aproximação racional e também serve como base para outros resultados.

Teorema (da Vizinhança de Farey). *As frações $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ são consecutivas na sequência de Farey F_n se, e somente se, $bc - ad = 1$ e $b + d \geq n + 1$.*

Demonstração. Como $\text{mdc}(a, b) = 1$, a equação linear $bx - ay = 1$ tem uma solução $x = x_0$, $y = y_0$. Além disso, $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$ também será uma solução para qualquer inteiro t . Escolha $t = t_0$ de forma que

$$0 \leq n - b < y_0 + bt_0 \leq n,$$

e defina $x = x_0 + bt_0$, $y = y_0 + bt_0$. Como $y \leq n$, $\frac{x}{y}$ será uma fração em F_n . Além disso,

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{1}{by} > \frac{a}{b},$$

de modo que $\frac{x}{y}$ aparece depois na sequência de Farey do que $\frac{a}{b}$. Se $\frac{x}{y} \neq \frac{c}{d}$, então $\frac{x}{y} > \frac{c}{d}$ e obtemos

$$\frac{x}{y} - \frac{c}{d} = \frac{dx - cy}{dy} \geq \frac{1}{dy},$$

bem como

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} \geq \frac{1}{bd}.$$

Somando as duas desigualdades, obtemos

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{dy} + \frac{1}{bd} = \frac{b+y}{bdy}.$$

Mas $b + y > n$ (lembre que $n - b < y$) e $d \leq n$, resultando na contradição

$$\frac{1}{by} = \frac{bx - ay}{by} = \frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{b+y}{bdy} > \frac{n}{bdy} \geq \frac{1}{by}.$$

Assim, $\frac{x}{y} = \frac{c}{d}$ e a equação $bx - ay = 1$ torna-se $bc - ad = 1$. $\square$

Daqui em diante, sempre que nos referirmos a frações que são termos consecutivos de uma sequência de Farey, usaremos o termo *vizinhas de Farey* para nos referirmos às mesmas.

O corolário a seguir, que nomearemos de Corolário da Mediane, revela uma característica interessante sobre frações consecutivas: a fração intermediária entre duas vizinhas de Farey é obtida através da soma dos numeradores e denominadores, resultando na chamada fração mediane. Esse corolário reforça a ideia de simetria e estrutura nas sequências de Farey, mostrando que frações medianes surgem naturalmente e estão posicionadas entre as frações originais, conforme esperado.

Corolário (da Mediane). *Se $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''}$ são vizinhas de Farey contidas em F_n , então*

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a + a''}{b + b''}.$$

Demonstração. Aplicando o TVF aos pares adjacentes:

$$1) \text{ Para } \frac{a}{b} \text{ e } \frac{a'}{b'}:$$

$$b'a - ba' = 1. \quad (1)$$

$$2) \text{ Para } \frac{a'}{b'} \text{ e } \frac{a''}{b''}:$$

$$b''a' - b'a'' = 1. \quad (2)$$

Subtraindo a equação (1) da equação (2):

$$(b''a' - b'a'') - (b'a - ba') = 1 - 1,$$

$$(b''a' - b'a'') - (b'a - ba') = 0.$$

Simplificando:

$$b''a' - b'a'' - b'a + ba' = 0,$$

$$a'(b'' + b) - b'(a'' + a) = 0.$$

Reorganizando:

$$a'(b + b'') = b'(a + a'').$$

Assim, obtemos:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a + a''}{b + b''}.$$

$\square$

Vale notar que uma das consequências importantes do TVF foi estabelecer uma cota mínima para a soma dos denominadores de duas frações vizinhas, cota essa que se verifica ser a melhor possível. Uma pergunta natural que emerge é: será que para três frações vizinhas também existe uma cota mínima para a soma de seus denominadores? A resposta é afirmativa. Por ora, apresentaremos uma cota mínima menos refinada, reservando para a seção de Problemas

Olímpicos a demonstração da melhor cota possível (que apareceu como problema 6 na OBM de 2024!).

Corolário (da Cota Mínima). Se $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''}$ são frações vizinhas de Farey contidas em F_n , então

$$b + b' + b'' \geq \left\lceil \frac{4(n+1)}{3} \right\rceil.$$

Demonstração. Do corolário anterior, sabemos que $\frac{a'}{b'} = \frac{a+a''}{b+b''}$. Seja então $d = (a+a'', b+b'')$. Logo o TVF nos dá que:

$$b + \frac{b+b''}{d} \geq n+1 \quad \text{e} \quad b'' + \frac{b+b''}{d} \geq n+1,$$

donde obtemos que

$$\begin{aligned} \left(b + \frac{b+b''}{d}\right) + \left(b'' + \frac{b+b''}{d}\right) &\geq 2(n+1) \\ \Rightarrow b + b'' &\geq \frac{2d(n+1)}{d+2}. \end{aligned}$$

Assim, vale que

$$\begin{aligned} b + b' + b'' &= b + b'' + \frac{b+b''}{d} \\ &= (b+b'') \frac{(d+1)}{d} \\ &\geq \frac{2d}{d+2} \cdot (n+1) \frac{(d+1)}{d} \\ &= 2(n+1) \frac{(d+1)}{d+2} \\ &\geq 2(n+1) \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Segue o resultado. $\square$

Como próximo resultado, temos o que chamaremos de Corolário da Aproximação, pois ele quantifica a diferença entre a mediana de duas frações e cada uma destas. Essa estimativa não apenas caracteriza a aproximação entre frações, mas também demonstra como as medianas são eficientes em dividir o espaço racional de maneira equilibrada. Este resultado, além de sua importância teórica, possui implicações práticas em problemas de aproximação racional de números reais.

Corolário (da Aproximação). Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ são vizinhas de Farey contidas em F_n , então

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{a+a'}{b+b'} \right| = \frac{1}{b(b+b')} \leq \frac{1}{b(n+1)},$$

e

$$\left| \frac{a'}{b'} - \frac{a+a'}{b+b'} \right| = \frac{1}{b'(b+b')} \leq \frac{1}{b'(n+1)}.$$

Demonstração. Usando o TVF, sabemos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{b} - \frac{a+a'}{b+b'} \right| &= \frac{|a(b+b') - b(a+a')|}{b(b+b')} \\ &= \frac{|ab + ab' - ab - ba'|}{b(b+b')} = \frac{1}{b(b+b')}. \end{aligned}$$

Então, como sabemos que $b + b' \geq n+1$, podemos substituir

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{a+a'}{b+b'} \right| = \frac{1}{b(b+b')} \leq \frac{1}{b(n+1)}.$$

Basta repetir esses passos para provar que a segunda desigualdade também é verdadeira. $\square$

O resultado a seguir mostra que, se tomarmos frações vizinhas em uma metade da sequência, há uma correspondência direta com frações na outra metade, formando um espelho perfeito. Essa propriedade é fundamental para compreender a estrutura palíndroma das sequências de Farey, uma característica que será explorada mais a fundo posteriormente.

Corolário (das Vizinhas Espelhadas). Se $\frac{0}{1} \leq \dots < \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots \leq \frac{1}{2}$ são frações vizinhas na sequência de Farey, então $\frac{1}{2} \leq \dots < \frac{b_2-a_2}{b_2} < \frac{b_1-a_1}{b_1} < \dots \leq \frac{1}{1}$ também são frações vizinhas.

Demonstração. Usando o TVF nas primeiras frações consecutivas dadas, temos $b_1 a_2 - a_1 b_2 = 1$. Portanto, $b_2(b_1 - a_1) - b_1(b_2 - a_2) = b_1 a_2 - a_1 b_2 = 1$. O restante é imediato. $\square$

Por fim, o Lema da Quantidade de Termos (LQT). Ele nos fornece uma fórmula recursiva para determinar quantos termos existem em uma sequência de Farey de ordem n . Essa relação recursiva depende da função Totiente de Euler, $\varphi(n)$, indicando que a quantidade de termos adicionados de uma ordem para outra está relacionada aos inteiros coprimos a n . Esse resultado também serve de ponto de partida para deduzir outras propriedades, como a fórmula fechada para a quantidade de termos.

Lema (da Quantidade de Termos). A quantidade de termos da sequência de Farey F_n é dada pela seguinte fórmula recursiva:

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n).$$

Demonstração. É imediato do processo de construção de F_n . $\square$

Observe que o LQT revela que a quantidade de elementos novos em F_n , em comparação com F_{n-1} , é dada por $\varphi(n)$. Os valores inteiros $1 \leq k < n$ que são

coprimos com n aparecem no numerador dos novos membros de F_n , com o denominador de cada novo termo em F_n sendo sempre igual a n . Assim, uma rápida contagem nos leva a

$$|F_n| = 1 + \sum_{k=1}^n \varphi(k).$$

Por outro lado, do seguinte resultado bem conhecido

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \varphi(k)}{n^2} = \frac{3}{\pi^2},$$

resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F_n| - 1}{n^2} = \frac{3}{\pi^2}.$$

Propriedades Especiais

Embora os resultados presentes nesta seção também sejam propriedades das sequências de Farey, eles são menos conhecidos, mas não menos belos e importantes. Para começar, temos o:

Teorema. Na sequência de Farey F_n , a soma dos elementos no denominador é duas vezes a soma dos elementos no numerador para todo inteiro positivo n .

Demonstração. Um lema que será útil nesta demonstração é o:

Lema (Auxiliar). Para todos os inteiros $n \geq 0$ e $k \geq 0$,

$$\sum_{\text{mdc}(k,n)=1} k = \frac{n\varphi(n)}{2}.$$

Demonstração do Lema. Se $\text{mdc}(n, k) = 1$, então $\text{mdc}(n, n - k) = 1$. Note que k não pode ser igual a $n - k$, pois, caso contrário, $\text{mdc}(n, n)$ não seria 1. O número de elementos coprimos com n é $\varphi(n)$. Assim, ao parear k e $n - k$, obtemos que a soma total é $\frac{n\varphi(n)}{2}$. $\square$

Usamos indução para provar resultado principal:

Seja N_n a soma dos elementos no numerador da n -ésima sequência de Farey F_n e D_n a soma dos elementos no denominador da n -ésima sequência de Farey. Para $n = 1$, $N_1 = 1$ e $D_1 = 2$, o que nos dá que $D_1 = 2N_1$. Agora assumimos que o resultado vale para $n - 1$. Provemos que o resultado vale para n :

$$\begin{aligned} N_n &= N_{n-1} + \sum_{\text{mdc}(n,k)=1} k \quad (\text{usando o LQT}) \\ &= N_{n-1} + \frac{n\varphi(n)}{2}, \quad (\text{usando o Lema Auxiliar}) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} D_n &= D_{n-1} + n\varphi(n) \quad (\text{usando o LQT}) \\ &= 2N_{n-1} + n\varphi(n) \quad (\text{usando a hipótese de indução}) \\ &= 2\left(N_{n-1} + \frac{n\varphi(n)}{2}\right) \\ &= 2N_n. \end{aligned}$$

Assim, pelo Princípio da Indução Finita, o resultado segue. $\square$

Um resultado interessantíssimo sobre a estrutura dos denominadores em uma sequência de Farey é que eles formam uma sequência palindrômica. Antes, cabe a:

Definição. Uma palavra ou sequência é chamada de *palíndroma* se sua leitura é idêntica tanto da esquerda para a direita quanto da direita para a esquerda. Palíndromos surgem em várias áreas, incluindo linguística, matemática e música. Exemplos incluem as palavras “ANA”, “OSSO” e “RADAR”, bem como os números “101”, “1001” e “12321”.

Com isso, podemos enunciar o:

Teorema. Os denominadores de cada fração em F_n para todo n na sequência de Farey formam uma sequência palíndroma.

Demonstração. Provamos este teorema por indução. Em F_1 , os denominadores são 1, 1, o que constitui uma sequência palíndroma. Em F_2 , os denominadores são 1, 2, 1, o que também constitui uma sequência palíndroma. Agora, suponha que os denominadores em F_{n-1} estejam em uma sequência palíndroma. Precisamos mostrar que os denominadores em F_n também estão em uma sequência palíndroma. Usando o *Corolário das Vizinhas Espelhadas* e a estrutura palíndroma dos denominadores em F_{n-1} , podemos escrever F_{n-1} na seguinte forma:

$$F_{n-1} = \left\{ \frac{0}{1}, \dots, \frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}, \dots, \frac{1}{2}, \dots, \frac{s_2 - r_2}{s_2}, \frac{s_1 - r_1}{s_1}, \dots, \frac{1}{1} \right\}$$

Suponha que, na próxima sequência F_n , um novo termo apareça entre $\frac{r_1}{s_1}$ e $\frac{r_2}{s_2}$. Seja $r_1 + r_2 = k$. Temos as seguintes relações, usando o TVF: $s_1 + s_2 = n$ e $\text{mdc}(n, k) = 1$. Agora, $(s_1 - r_1) + (s_2 - r_2) = n - k$. Assim, podemos escrever F_n em termos de n e k da seguinte forma:

$$F_n = \left\{ \frac{0}{1}, \dots, \frac{r_1}{s_1}, \frac{k}{n}, \frac{r_2}{s_2}, \dots, \frac{1}{2}, \dots, \frac{s_2 - r_2}{s_2}, \frac{n - k}{n}, \frac{s_1 - r_1}{s_1}, \dots, \frac{1}{1} \right\}$$

Como $\frac{r_1}{s_1} < \frac{k}{n} < \frac{r_2}{s_2}$ são vizinhos, temos:

$$ks_1 - nr_1 = 1 \quad \text{e} \quad nr_2 - ks_2 = 1.$$

Note que,

$$n(s_1 - r_1) - (n - k)s_1 = ks_1 - nr_1 = 1,$$

$$(n - k)s_2 - n(s_2 - r_2) = nr_2 - ks_2 = 1.$$

Portanto, $\frac{s_2 - r_2}{s_2} < \frac{n - k}{n} < \frac{s_1 - r_1}{s_1}$ são vizinhos também. Assim, provamos que os denominadores em F_n formam uma sequência palíndroma. O resultado desejado segue por indução. $\square$

Observação. Por comprimento de um palíndromo, entendemos o número de elementos que aparecem nele.

Aplicações

A teoria das sequências de Farey possui diversas aplicações interessantes, especialmente no contexto da aproximação de números reais por frações racionais. Devido às suas propriedades de estrutura e ordenação, as sequências de Farey permitem encontrar aproximações racionais precisas, utilizando denominadores relativamente pequenos. A seguir, apresentamos uma série de resultados que ilustram como as sequências de Farey podem ser aplicadas na resolução de problemas de aproximação racional.

O primeiro teorema desta seção trata da aproximação de um número real x por uma fração cujo denominador está limitado a um valor específico. Esse resultado é particularmente útil para encontrar boas aproximações racionais com um denominador pré-definido, destacando o papel importante das medianas no processo de aproximação eficiente de valores reais. Essa abordagem é essencial em contextos onde a simplicidade e praticidade da fração são preferíveis, como na computação numérica e na aritmética prática.

Teorema. Se x é um número real e n é um inteiro positivo, então podemos encontrar inteiros a e b relativamente primos, tal que $0 < b \leq n$ e

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{1}{b(n+1)}.$$

Demonstração. Recorde o *Corolário da Aproximação*, que afirma

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} \right| = \frac{1}{b(b+d)} \leq \frac{1}{b(n+1)}.$$

Agora, suponha que um número real x esteja entre as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{a+c}{b+d}$. Então, novamente pelo *Corolário da Aproximação*,

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} \right| \leq \frac{1}{b(n+1)}. \quad \square$$

Após esse teorema, estendemos o conceito ao caso dos números irracionais. O objetivo aqui é provar que é sempre possível aproximar um número irracional com a precisão desejada utilizando frações racionais.

Teorema. Se ξ é um número real e irracional, então existem infinitas frações $\frac{a}{b}$ tais que

$$\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^2}.$$

Demonstração. Para qualquer inteiro $n > 0$, podemos encontrar a_n e b_n usando o Teorema anterior, onde $0 < b_n \leq n$ e

$$\left| \xi - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n(n+1)}.$$

Agora, vamos supor, por meio de uma contradição, que há apenas um número finito de valores distintos. Se isso fosse verdade, então existiria um valor k tal que

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \geq \left| \frac{a_k}{b_k} \right|$$

para todo $n > 0$. Isso implica que

$$\left| \xi - \frac{a_n}{b_n} \right| \geq \left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right|.$$

Como ξ é irracional, sabemos que

$$\left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right| > 0.$$

Isso significa que podemos encontrar um n suficientemente grande tal que

$$\frac{1}{n+1} > \left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right|.$$

Isso leva à contradição:

$$\left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right| \leq \left| \xi - \frac{a_n}{b_n} \right| \leq \frac{1}{b(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} < \left| \xi - \frac{a_k}{b_k} \right|. \quad \square$$

Em seguida, apresentamos o famoso Teorema de Hurwitz, que também faz uso das sequências de Farey para garantir a existência de aproximações racionais precisas para números irracionais. O Teorema de Hurwitz vai além ao garantir que, para qualquer número irracional, existem infinitas frações que aproximam este número com um erro menor do que uma constante, que depende do quadrado do denominador.

Teorema (Hurwitz). *Dado um número irracional ξ , existem infinitos números racionais $\frac{h}{k}$ tais que*

$$\left| \xi - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}k^2}.$$

Demonstração. Suponha que $\xi \in (0, 1)$. Mostraremos que, se $\frac{a}{b} < \xi < \frac{c}{d}$ para duas frações consecutivas de Farey de F_n , então uma das três frações

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$$

satisfaz a desigualdade, onde $\frac{e}{f}$ é igual à mediana $\frac{a+c}{b+d}$.

Observe que, ao aproximarmos ξ entre as frações de Farey de F_n , podemos simplesmente continuar aumentando n , o que nos dá infinitas frações que satisfazem a desigualdade. Agora provaremos a desigualdade por contradição.

Suponha que nenhuma das três frações satisfaça a desigualdade. Isso significa que

$$\xi - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5}b^2}, \quad \xi - \frac{e}{f} \geq \frac{1}{\sqrt{5}f^2}, \quad \frac{c}{d} - \xi \geq \frac{1}{\sqrt{5}d^2}.$$

Note que estamos assumindo que ξ está entre $\frac{e}{f}$ e $\frac{c}{d}$, o que explica os sinais na última inequação devido ao uso de valores absolutos. Também observe que igualdades podem ocorrer.

Agora, se somarmos a primeira e a terceira desigualdades, e a segunda e a terceira desigualdades, ficamos com as duas desigualdades

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2} \right), \quad \frac{c}{d} - \frac{e}{f} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{f^2} + \frac{1}{d^2} \right).$$

Observe que

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} = \frac{1}{bd}, \quad \frac{c}{d} - \frac{e}{f} = \frac{cf - de}{df} = \frac{1}{df}.$$

Assim, restam as duas desigualdades

$$\frac{1}{bd} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2} \right), \quad \frac{1}{df} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{f^2} + \frac{1}{d^2} \right).$$

Se multiplicarmos a primeira desigualdade por $\sqrt{5}b^2d^2$ e a segunda por $\sqrt{5}d^2f^2$, e então somarmos os resultados, obtemos

$$\begin{aligned} d\sqrt{5}(b+f) &= d\sqrt{5}(2b+d) \\ &\geq b^2 + 2d^2 + f^2 \\ &= 2b^2 + 3d^2 + 2bd, \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$0 \geq \frac{1}{2}((\sqrt{5}-1)d - 2b)^2.$$

Isso implica que $(\sqrt{5}-1)d - 2b = 0$, o que nos leva a

$$\sqrt{5} = 1 - \frac{2b}{d}.$$

Isso significa que $\frac{2b}{d}$ é um número irracional, o que é uma contradição. Assim, o Teorema de Hurwitz foi provado. $\square$

Problemas Olímpicos

Agora, vamos colocar a teoria em prática, resolvendo alguns problemas olímpicos.

Problema 1. Em uma formação regular de $n \times n$, há n^2 estudantes dispostos em uma grade. Dois estudantes podem ver um ao outro se a linha direta de visão entre eles não estiver obstruída por outro estudante. Em outras palavras, se três estudantes estão colineares, o estudante do meio bloqueia a linha de visão entre os outros dois. Quantos estudantes o estudante localizado no canto inferior esquerdo da grade pode ver?

Solução. Coloquemos coordenadas nos estudantes, de forma que aquele no canto inferior esquerdo seja o ponto $(0, 0)$. Assim, a quantidade de estudantes que o estudante na posição $(0, 0)$ enxerga acima da diagonal $y = x$ é equivalente ao número de frações irredutíveis na sequência de Farey F_{n-1} .

Ao restringirmos apenas aos pontos (x, y) com $x \leq y$, estamos contando o número de frações irredutíveis entre 0 e 1 com denominador no máximo $n-1$. A resposta final é, então, $2|F_{n-1}| - 1$, onde $|F_n|$ representa o número de termos na sequência de Farey de ordem n . $\square$

Problema 2. Sejam P e Q polinômios inteiros. Suponha que, para todos os inteiros a e b , $aP + bQ$ possui uma raiz inteira. Então P e Q possuem uma raiz inteira em comum.

Solução. Suponha que P e Q não têm raízes inteiras em comum. Vamos demonstrar que isso leva a uma contradição. Da suposição que P e Q não têm raízes inteiras em comum, temos que $(P(n), Q(n)) \neq (0, 0)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a aplicação linear $T_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x, y) = xP(n) + yQ(n)$ é sobrejetiva e seu kernel é um subespaço de dimensão 1 que passa pela origem. Em outras palavras, o kernel de T_n , que chamaremos de R_n , é uma reta que passa pela origem e com coeficiente angular racional. Seja

$$\mathbb{Z}_n^2 / \sim = \{[(a, b)] : (a, b) \in \mathbb{Z}^2, 0 < |a|, |b| \leq n\},$$

onde $[(a, b)] = \{(c, d) \in \mathbb{Z}^2 : bd = ac\}$. Defina a função

$$A: \mathbb{Z}_n^2 / \sim \rightarrow R = \{R_n; n \in \mathbb{Z}\}$$

$$A([(a, b)]) = R_k, \text{ onde } (a, b) \in R_k.$$

Como para todo $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ existe k inteiro tal que $aP(k) + bQ(k) = 0$, então A está bem definida. É imediato também que A é injetiva. Se $aP(k) + bQ(k) = 0$, então, pelo Critério de Pesquisa de Raízes Racionais, temos

$$k \leq |aP(0) + bQ(0)| \leq 2n \cdot \max\{|P(0)|, |Q(0)|\}$$

Logo, usando o Problema 1, concluímos que

$$2(2|F_N| - 1) \leq 2n \cdot \max\{|P(0)|, |Q(0)|\},$$

um absurdo, já que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F_n|}{n^2} = \frac{3}{\pi^2}$. Segue o resultado. $\square$

Problema 3. A sequência de Fibonacci é definida como $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Suponha que a e b são inteiros positivos tais que $\frac{a}{b}$ está entre as duas frações $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ e $\frac{f_{n+1}}{f_n}$. Mostre que $b \geq f_{n+1}$.

Solução. De fato, podemos usar a mesma estratégia da prova do TVF para mostrar que, se $|ad - bc| = 1$, para cada fração $\frac{p}{q}$ que está entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, temos que q é maior ou igual a $b + d$.

Tome $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ e $ad - bc = -1$. Então, $\frac{p}{q} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{bq}$ e $\frac{c}{d} - \frac{p}{q} \geq \frac{1}{dq}$ (pois $pb > aq$ e $cq > pd$). Somando-as, temos

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{bq} + \frac{1}{dq}.$$

Como $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}$, temos $\frac{1}{bd} \geq \frac{b+d}{bdq}$. Assim, obtemos $q \geq b + d$.

Neste caso, $|f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1}| = 1$. Logo, para qualquer $\frac{p}{q}$ entre $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ e $\frac{f_n}{f_{n-1}}$, temos $q \geq f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$. $\square$

Problema 4 Existe um conjunto de esferas $\mathcal{S}$, duas a duas disjuntas, tal que para cada ponto $P \in \mathbb{Q}^2$ existe uma esfera $s \in \mathcal{S}$ tangente ao plano no ponto P ?

Solução. Sim, existe tal conjunto de esferas. Vamos construir explicitamente esse conjunto de esferas disjuntas, associando a cada ponto $P \in \mathbb{Q}^2$ uma esfera tangente ao plano no ponto P .

Começamos considerando as sequências de Farey F_n . Definimos então $F_n^2 = F_n \times F_n$, que é o conjunto de pontos no quadrado unitário $[0, 1]^2$ com coordenadas racionais e denominadores limitados por n .

Observamos que $F_n^2 \subseteq F_{n+1}^2$ e que a união de todos os F_n^2 é exatamente $\mathbb{Q}^2 \cap [0, 1]^2$. Para cada $n \geq 1$, definimos o conjunto dos novos pontos introduzidos na etapa n como $S_n = F_n^2 \setminus F_{n-1}^2$, com a convenção de que $F_0^2 = \emptyset$.

Nosso objetivo é associar esferas disjuntas aos pontos em F_n^2 de forma que, para cada $P \in F_n^2$, exista uma esfera tangente ao plano no ponto P , e que essas esferas sejam disjuntas entre si. Faremos isso por indução em n .

Suponha que já tenhamos associado esferas disjuntas aos pontos em F_{n-1}^2 , todas com raios menores ou iguais a r_{n-1} . Na etapa n , queremos associar esferas aos pontos em S_n de modo que:

1. As esferas associadas aos pontos em S_n sejam disjuntas entre si. 2. As esferas associadas aos pontos em S_n não intersectem as esferas já atribuídas aos pontos em F_{n-1}^2 .

Para garantir isso, escolhemos um raio r_n suficientemente pequeno. Como S_n é um conjunto finito de pontos cujas coordenadas têm denominadores entre $n-1$ e n , existe uma distância mínima positiva δ_n entre quaisquer dois pontos distintos em S_n , e uma distância mínima positiva ϵ_n entre um ponto em S_n e um ponto em F_{n-1}^2 . Escolhemos então r_n tal que:

$$r_n < \frac{1}{3} \min\{\delta_n, \epsilon_n, r_{n-1}\}.$$

Com essa escolha, associamos a cada ponto $P \in S_n$ uma esfera de raio r_n , centrada em (x_P, y_P, r_n) , onde (x_P, y_P) são as coordenadas de P . Essa esfera é tangente ao plano $z = 0$ no ponto P .

Verifiquemos que as esferas associadas aos pontos em S_n são disjuntas entre si:

Para quaisquer dois pontos distintos $P, Q \in S_n$, a distância entre eles no plano é pelo menos δ_n . Portanto, a distância entre os centros das esferas é também pelo menos δ_n , e como $2r_n < \delta_n$, as esferas não se intersectam.

Além disso, as esferas associadas aos pontos em S_n não intersectam as esferas associadas aos pontos em F_{n-1}^2 . A distância entre um ponto $P \in S_n$ e um ponto $Q \in F_{n-1}^2$ é pelo menos ϵ_n , e a soma dos raios das esferas correspondentes é menor que $r_n + r_{n-1} \leq \frac{1}{3}\epsilon_n + r_{n-1} \leq \epsilon_n$, pois $r_n \leq \frac{1}{3}\epsilon_n$ e $r_{n-1} \leq \frac{1}{3}\epsilon_n$. Portanto, as esferas não se intersectam.

Procedendo dessa forma para cada n , atribuímos esferas disjuntas a todos os pontos em $\mathbb{Q}^2 \cap [0, 1]^2$. Para pontos em $\mathbb{Q}^2$ fora do quadrado unitário, podemos estender a construção por translações inteiras, cobrindo todo o plano racional $\mathbb{Q}^2$. $\square$

Problema 5 (OBM 2024 - Nível 3 - Problema 6) Seja $n > 1$ um inteiro positivo. Enumere em ordem crescente todas as frações irredutíveis do intervalo $[0, 1]$ que têm denominador positivo e menor ou igual a n :

$$\frac{0}{1} = \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_1}{q_1} < \dots < \frac{p_M}{q_M} = \frac{1}{1}.$$

Determine, em função de n , o menor valor possível de $q_{i-1} + q_i + q_{i+1}$, $0 < i < M$.

Solução. Seja S_n a menor soma dos denominadores de três frações consecutivas na sequência de Farey de ordem n . Do Corolário da Cota Mínima, temos que

$$S_n \geq \left\lceil \frac{4(n+1)}{3} \right\rceil.$$

Pela prova do Corolário, essa cota seria atingida assumindo $d \geq 1$ (mantendo a notação usada na prova do corolário). Repetindo os mesmos cálculos, se a cota mínima fosse atingida para $d \geq 2$, então teríamos

$$S_n \geq \left\lceil \frac{3(n+1)}{2} \right\rceil.$$

Usaremos essas estimativas para provar que, para $k \geq 1$, a tripla de frações cuja soma dos denominadores é mínima é:

$$\begin{aligned} n = 6k &\rightarrow \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{2}{4k+1}, \frac{1}{2k} \right), \\ n = \begin{cases} 6k+1, \\ 6k+2, \\ 6k+3 \end{cases} &\rightarrow \left(\frac{1}{2k+2}, \frac{2}{4k+3}, \frac{1}{2k+1} \right), \\ n = 6k+4 &\rightarrow \left(\frac{k}{2k+1}, \frac{2k+1}{4k+4}, \frac{k+1}{2k+3} \right), \\ n = 6k+5 &\rightarrow \left(\frac{1}{2k+3}, \frac{2}{4k+5}, \frac{1}{2k+2} \right). \end{aligned}$$

Note inicialmente que, pelo TVF, cada trio de frações é de fato composto por frações consecutivas das respectivas sequências. Também é imediato pelo Corolário da Cota Mínima que, para os casos $n = 6k$ e $n = 6k+3$, as respectivas frações já atingem o mínimo ótimo, sendo portanto a melhor cota. Mostremos para os demais casos que, de fato, as frações citadas nos fornecem a melhor cota possível. A tabela a seguir detalha as cotas mínimas para cada estimativa:

n	Cota mín. para $d = 1$	Cota mín. para $d = 2$	Cota mín. conjecturada
$6k+1$	$8k+3$	$9k+3$	$8k+6$
$6k+2$	$8k+4$	$9k+3$	$8k+6$
$6k+4$	$8k+7$	$9k+6$	$8k+8$
$6k+5$	$8k+8$	$9k+8$	$8k+10$

Note que, para $k > 3$, as estimativas para $d \geq 2$ já superam as cotas conjecturadas. Então, deixamos os casos $k = 1, 2, 3$ como exercício e voltamos nossa atenção para quando $d = 1$.

Quando $d = 1$, temos S_n par e, portanto, para o caso $n = 6k+4$, concluímos que $S_{6k+4} = 8k+8$. Veja os demais casos a seguir:

Casos $n = 6k+1$ e $n = 6k+2$: Faremos as contas para $n = 6k+1$, mas o caso $n = 6k+2$ é totalmente análogo. Suponha que $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{u}{v}$ é um trio em F_{6k+1} tal que $b+y+v = 8k+4$. Assim, temos $y = b+v = 4k+2$. Como $b+y \geq 6k+2$, $y+v \geq 6k+2$ e $(b, y) = (y, v) = 1$, segue que $b = v = 2k+1$. As equações do TVF nos dão

$$\begin{cases} 2k(a+u) - a(2k+1) = 1, \\ (2k+1)u - 2k(a+u) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ku - a = 1, \\ u - 2ka = 1, \end{cases}$$

chegando à contradição $(2k+1)(u-a) = 2$. Logo, $S_{6k+1} = 8k+6$.

Caso $n = 6k+5$:

Mantendo a notação do caso anterior, suponha agora que $b+y+v = 8k+8$. Devemos ter $b+y \geq 6k+6$, $y+v \geq 6k+6$ e $y = b+v = 4k+4$. Com isso, $b \geq 2k+3$ e $v \geq 2k+3$, já que y é par, o que leva a uma contradição, pois a soma já supera $4k+6$. Daí, $S_{6k+5} = 8k+10$.

Concluímos, portanto, que as cotas mínimas para $n \geq 6$ são:

$$S_n = 8 \cdot \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \begin{cases} 2, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{6}, \\ 6, & \text{se } n \equiv 1, 2, 3 \pmod{6}, \\ 8, & \text{se } n \equiv 4 \pmod{6}, \\ 10, & \text{se } n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

Os casos iniciais são $S_1 = 2, S_2 = 4, S_3 = 6, S_4 = 8, S_5 = 10$. Assim, concluímos o problema. $\square$

Exercícios

Exercício 1. Seja $a_1, a_2, \dots, a_n$ uma sequência finita de inteiros. Dizemos que essa sequência é *regular* se existe um número real x tal que

$$\lfloor kx \rfloor = a_k \quad \text{para } 1 \leq k \leq n.$$

Dado um índice $1 \leq k \leq n$, o termo a_k é chamado de *forçado* se a única forma de completar a sequência $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, b$ para ser regular é tomando $b = a_k$ (ou seja, a_k é forçado se não houver outra opção para b que mantenha a regularidade da sequência). Encontre o número máximo possível de termos forçados em uma sequência regular com 1000 termos.

Exercício 2. Observe as seguintes frações. No primeiro passo temos $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{0}$, e em cada passo escrevemos $\frac{a+b}{c+d}$ entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, e fazemos isso indefinidamente.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{0}{1} & & & & & & \frac{1}{0} \\ \frac{0}{1} & & & & & & \frac{1}{0} \\ \frac{0}{1} & & & & & & \frac{1}{0} \\ \frac{0}{1} & & & & & & \frac{1}{0} \\ \frac{1}{3} & & & & & & \frac{2}{1} \\ \frac{2}{2} & & & & & & \frac{3}{1} \\ \frac{2}{3} & & & & & & \frac{3}{1} \\ \dots & & & & & & \end{array}$$

- (a) Prove que cada uma dessas frações é irredutível.
- (b) No plano, colocamos infinitos círculos de diâmetro 1, sobre cada inteiro na reta real, um círculo. Indutivamente, colocamos círculos de forma que cada círculo seja tangente a dois círculos adjacentes e à reta real, e continuamos isso indefinidamente. Prove que os pontos de tangência desses círculos são exatamente todos os números na parte (a) (exceto $\frac{1}{0}$).

Exercício 3. (IMO Shortlist 2016) Considere frações $\frac{a}{b}$ onde a e b são inteiros positivos.

- (a) Prove que, para todo inteiro positivo n , existe tal fração $\frac{a}{b}$ tal que $\sqrt{n} \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{n+1}$ e $b \leq \sqrt{n+1}$.
- (b) Mostre que existem infinitos inteiros positivos n tais que nenhuma fração $\frac{a}{b}$ satisfaz $\sqrt{n} \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{n+1}$ e $b \leq \sqrt{n}$.

Exercício 4. (OBM 2024 - Nível U) Para cada inteiro positivo n , enumere em ordem crescente todas as frações irredutíveis do intervalo $[0, 1]$ que têm denominador positivo e menor ou igual a n :

$$\frac{0}{1} = \frac{p_0}{q_0} < \frac{1}{n} = \frac{p_1}{q_1} < \dots < \frac{1}{1} = \frac{p_{M(n)}}{q_{M(n)}}.$$

Seja k um inteiro positivo. Definimos, para cada n tal que $M(n) \geq k-1$,

$$f_k(n) = \min \left\{ \sum_{s=0}^{k-1} q_{j+s} : 0 \leq j \leq M(n) - k + 1 \right\}.$$

Determine, em função de k , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_k(n)}{n}$.

Exercício 5. (USOMO 2020) Suponha que $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{100}, b_{100})$ são pares ordenados distintos de inteiros não negativos. Seja N o número de pares de inteiros (i, j) que satisfazem $1 \leq i < j \leq 100$ e $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$. Determine o maior valor possível de N considerando todas as escolhas possíveis dos 100 pares ordenados.

Exercício 6. (USAMO 1999) Seja $p > 2$ um número primo e sejam a, b, c, d inteiros não divisíveis por p , tais que

$$\left\{ \frac{ra}{p} \right\} + \left\{ \frac{rb}{p} \right\} + \left\{ \frac{rc}{p} \right\} + \left\{ \frac{rd}{p} \right\} = 2$$

para qualquer inteiro r não divisível por p . Prove que pelo menos dois dos números $a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d$ são divisíveis por p .

Bibliografia

- [1] Art of problem solving community. <https://artofproblemsolving.com/community>, 2024. Accessed: 2024.
- [2] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Proofs from the book*. Springer, Berlin, 1998.
- [3] Johar Ashfaq. *Farey Sequences*. 2020.
- [4] D. M. Burton. *Elementary Number Theory*. Allyn and Bacon, Inc., 1980.
- [5] Soham Das, Kishalay Halder, Sanjoy Pratihar, and Partha Bhowmick. Properties of Farey sequence and their applications to digital image processing. *Computer Science & Engineering*, 2019.
- [6] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 2 edition, 1994.
- [7] Scott B. Guthery. *A Motif of Mathematics*. unknown, 2010.
- [8] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 5 edition, 1979.
- [9] A. Hatcher. Topology of numbers. <http://www.math.cornell.edu/hatcher>, 2020. Chapter 1.
- [10] H. G. Landau and H. J. Landau. *Prime numbers and the Riemann hypothesis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [11] Fabio E. Brochero Martinez, Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Nicolau C. Saldanha, and Eduardo Tengan. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. 2020.
- [12] Antonio Caminha Muniz Neto. *Tópicos de Matemática Elementar: Teoria dos Números*, volume 5 of *Coleção do Professor de Matemática*. SBM, 2020.
- [13] Ivan Niven and Herbert S. Zuckerman. *An introduction to the Theory of Numbers*. John Wiley Sons, Inc, New York, 1960.

-
- [14] Ripan Saha. On some special property of the Farey sequence. *Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences*, 7(2):121–123, March 2019.
- [15] Dylan Zukin. The Farey sequence and its niche(s), May 2016.



Carlos Augusto D. Ribeiro é professor associado na Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPAr) e um ex-olímpico com prêmios na OBM, OCM, Rioplatense e outras competições. Consciente do impacto transformador que a Olimpíada de Matemática teve em sua trajetória, hoje ele re-

tribui participando da organização da OBM, colaborando com a ONG Cactus na criação de materiais de treinamento que alcançam milhares de estudantes da rede pública e atuando no Projeto CQD, onde tem a alegria de trabalhar com amigos dos tempos de olimpíada. Nerd assumido, viciado em Star Wars e apaixonado por sua esposa, Keyv Lany, ele tenta manter o bom humor (mesmo quando seus pets, Ahsoka e Yoda, decidem causar!).

ANTOLOGIA

Matemática e Matemáticos

Pensamentos e Curiosidades

Alphonse Rebière

Mathématiques et Mathématiciens: Pensées et Curiosités de Alphonse Rebière é uma coleção de reflexões filosóficas e curiosidades relacionadas à matemática, escrita no final do século XIX. Esta obra explora vários conceitos matemáticos, teorias e a importância da matemática em diferentes campos por meio de *insights* de pensadores históricos e contemporâneos. Apresentamos aqui uma seleção de trechos desta ANTOLOGIA.

Objeto e Caráter da Matemática

Com o que a matemática se preocupa, senão com proporção e ordem?

ARISTÓTELES

Primeiro me perguntei o que exatamente todos queriam dizer com esta palavra (matemática), e por que não apenas a aritmética e a geometria eram consideradas parte da matemática, mas também a astronomia, a música, a óptica, a mecânica e várias outras ciências.

(...)

Não há ninguém, mesmo que tenha apenas tocado as soleiras das escolas, que não distinga facilmente, entre os objetos que lhe são apresentados, aqueles que estão ligados à matemática e aqueles que pertencem às outras ciências. Refletindo sobre isso, descobri finalmente que só devemos relacionar com a matemática todas as coisas nas quais examinamos a ordem ou a medida, e que

pouco importa se é nos números, nas figuras, nas estrelas, nos sons ou em qualquer outro objeto que procuramos medir.

DESCARTES

As especulações matemáticas têm o caráter comum e essencial de estarem ligadas a duas ideias ou categorias fundamentais: a ideia de *ordem* sob a qual é permitido classificar... as ideias de situação, configuração, forma e combinação; e a ideia de *magnitude* que envolve as de quantidade, proporção e medida.

COURNOT

Conseguimos, portanto, definir a ciência matemática com precisão, atribuindo ao seu objetivo a medição *indireta* de quantidades e dizendo que ela visa constantemente *determinar as quantidades umas pelas outras, de acordo com as relações precisas que existem entre elas*. Esta afirmação, em vez de dar a ideia de uma *arte*, caracteriza imediatamente uma verdadeira *ciência*, e de imediato mostra que ela é composta por uma imensa sequência de operações intelectuais que podem obviamente tornar-se muito complicadas, devido à série de intermediários que deverão ser estabelecidos entre as grandezas desconhecidas e aquelas que envolvem uma medição direta... Segundo esta definição, a mente matemática consiste em vê-las sempre ligadas entre si, todas as grandezas que qualquer

fenômeno pode apresentar, com o objetivo de deduzi-las uma da outra.

A. COMTE

O matemático prepara antecipadamente moldes que o físico preencherá mais tarde.

TAINE

A matemática forma uma ponte, por assim dizer, entre a metafísica e a física.

KANT

As verdades geométricas são, de certa forma, a assíntota das verdades físicas, isto é, o termo do qual elas podem se aproximar indefinidamente, sem nunca chegar lá exatamente.

D'ALEMBERT

Noções Primitivas

Talvez achemos estranho que a geometria não possa definir nenhuma das coisas que tem como objetos principais; porque não define nem movimento, nem número, nem espaço; e no entanto estas três coisas são as que ela considera particularmente... Mas não nos surpreenderemos, se notarmos que esta admirável ciência só se liga às coisas mais simples, esta mesma qualidade que torna os seus objetos dignos de ser, torna-os incapazes de serem definidos; de modo que a indefinição é mais uma perfeição do que um defeito, porque não provém da sua obscuridade, mas pelo contrário da sua extrema obviedade...

PASCAL

A origem das noções matemáticas deu origem a controvérsias ainda pendentes entre os filósofos. Para alguns, os números e as figuras são tipos criados do nada pela mente e que se impõem às coisas da experiência, em virtude de uma misteriosa concordância entre o pensamento e a realidade externa. Para outros, pelo contrário, os números e os algarismos não constituem exceção a esta lei geral segundo a qual todo o conhecimento deriva, direta ou indiretamente, da experiência sensível. Num caso, as noções matemáticas seriam modelos; no outro, seriam cópias.

Este não é o lugar para entrar nesta controvérsia e ponderar as razões apresentadas por ambos os lados. Basta-nos notar dois fatos: em primeiro lugar, qualquer que seja a opinião que professemos sobre a origem das noções matemáticas, não contaremos que elas não são representações absolutamente exatas de realidades externas. A unidade é divisível em partes estritamente iguais; este não é o caso de um objeto real; nunca a metade, o quarto, o décimo deste objeto serão rigorosamente iguais à outra metade, a cada um dos outros três quartos, a cada um dos outros nove décimos, e ainda quanto mais as subdivisões se multiplicarem, mais a desigualdade real das peças aumentará. O círculo dos geômetras tem raios absolutamente iguais; este nunca será o caso dos raios de um círculo real; todos os pontos de uma superfície esférica são equidistantes do centro; este nunca será o caso dos raios de uma esfera material. Em segundo lugar, o matemático considera frequentemente números e figuras cujos modelos ele nunca encontrou na realidade. Qualquer divisão de um objeto real em partes iguais tem um limite que os nossos sentidos e os nossos instrumentos de precisão, mesmo os mais aperfeiçoados, são impotentes para ultrapassar; O pensamento do matemático ultrapassa facilmente esse limite e, além das menores divisões possíveis de um objeto, ele concebe outras divisões repetidas vezes *ad infinitum*; da mesma forma existem limites para a adição de objetos; não é o das unidades matemáticas; a natureza rapidamente deixou de fornecer; a contagem nunca para. Da mesma forma, na geometria, por mais variadas que sejam as formas produzidas na natureza, há algumas cujas propriedades o geômetra estuda, sem nunca as ter encontrado no mundo exterior. Quem já viu um polígono regular com mil lados?

Resulta deste duplo fato que, mesmo no caso em que a mente retira da experiência os primeiros elementos dos quais compõe as noções matemáticas, ela as elabora, transforma-as e não demora muito a libertar-se das sugestões experimentais.

LIARD

Métodos

Existe na matemática um método para a busca da verdade, que se diz que Platão inventou, que Theon chamou de análise e que ele definiu assim: *Olhe para a coisa procurada, como se ela fosse dada, e caminhe das consequências por consequências, até reconhecermos a coisa procurada como verdadeira*. Pelo contrário, a síntese é definida: *Partindo de uma coisa dada, para chegar, de consequências a consequências, a encontrar uma coisa procurada*.

VIÈTE

Seria desejável que não deixássemos tão esquecidos certos resultados do trabalho dos geômetras dos séculos passados, e que voltássemos um pouco aos princípios quase sempre fáceis e muitas vezes engenhosos com os quais os grandes homens daquela época o haviam alcançado; porque não são tanto as verdades particulares, mas os métodos que não devem perecer.

PONCELET

Esta é uma observação que podemos fazer em todas as nossas pesquisas matemáticas: estas quantidades auxiliares, estes cálculos longos e difíceis em que nos vemos arrastados, são quase sempre a prova de que a nossa mente não considerou, desde o início, as coisas em si mesmas e desde uma visão bastante direta, já que precisamos de tantos artifícios e desvios para chegar lá; enquanto tudo se torna mais curto e simples assim que nos colocamos no verdadeiro ponto de vista.

POINSOT

Parece que no estado atual das ciências matemáticas, a única maneira de evitar que o seu domínio se torne demasiado vasto para a nossa inteligência é generalizar cada vez mais as teorias que estas ciências abraçam, de modo que um pequeno número de verdades gerais e fecundas seja, na cabeça dos homens, a expressão abreviada da maior variedade de fatos particulares.

CHARLES DUPIN

Querendo resolver algum problema, devemos primeiro considerá-lo como já feito,

e dar nomes a todas as linhas que parecem necessárias para construí-lo, tanto às que são desconhecidas como às que não o são. Então, sem considerar qualquer diferença entre essas linhas conhecidas e desconhecidas... procuramos expressar a mesma quantidade de duas maneiras, o que é chamado de equação... Devemos encontrar tantas equações quantas supusemos serem as linhas que eram desconhecidas.

DESCARTES

Podemos estabelecer na Matemática outra classificação, baseada não mais no objeto da ciência, mas nos seus métodos. Deste novo ponto de vista, teríamos que distinguir dois tipos de Análise:

1. O de quantidades descontínuas;
2. O das grandezas contínuas.

Na primeira, procuramos as relações que existem entre certas quantidades fixas dadas *a priori*. Este método é utilizado nas partes elementares da Matemática, e mais especialmente na Aritmética e no início da Geometria, exceto num pequeno número de teoremas fundamentais, cuja demonstração requer a noção de quantidades incommensuráveis.

Na Análise de Quantidades Contínuas, pelo contrário, consideramos que os elementos da questão proposta podem variar em graus insensíveis e procuramos determinar as leis que regem as suas variações simultâneas.

Este método, do qual Euclides e Arquimedes deram exemplos notáveis, caiu no esquecimento durante vários séculos, quando a memorável descoberta de Descartes sobre a aplicação da Álgebra à teoria das curvas obrigou os geômetras resolver as duas questões que se impuseram a eles, o problema das tangentes e o das quadraturas.

JORDAN

Geometria e Análise

A álgebra é apenas geometria escrita, a geometria é apenas álgebra figurada.

SOPHIE GERMAIN

A álgebra é generosa, muitas vezes dá mais do que lhe é pedido.

D’ALEMBERT

As sucessivas extensões que fizermos às operações e definições matemáticas devem estar sujeitas ao princípio da *permanência das regras de cálculo*.

HANKEL

Filosofia e Moral

Dispusestes tudo com medida, quantidade e peso.

BÍBLIA

Os números governam o mundo.

PLATÃO

Há geometria em todos os lugares.

LEIBNIZ

Deus, o grande geômetra. — Deus geometrizava sem cessar.

PLATÃO

Deus é um círculo cujo centro está em toda parte e a circunferência em lugar nenhum.

RABELAIS; MONTAIGNE; PASCAL

Não há número aos olhos de Deus. Como ele vê tudo ao mesmo tempo, ele não conta nada.

CONDILLAC

No meio de causas variáveis e desconhecidas, que entendemos pelo nome de acaso, e que tornam incerto e irregular o curso dos acontecimentos, vemos nascer, à medida que se multiplicam, uma regularidade impressionante que parece ser um desígnio, o que foi considerado prova da providência.

LAPLACE

Não consigo conceber como matemáticos tão habilidosos negariam um matemático eterno.

VOLTAIRE

Não deixe ninguém entrar aqui, a menos que seja um geômetra.

PLATÃO

Sem a matemática não penetramos nas profundezas da filosofia: sem a filosofia não penetramos nas profundezas da matemática; sem ambos, não chegamos ao fundo de nada.

BORDAS-DEMOULINS

O número reside em tudo o que é conhecido. Sem ele é impossível pensar alguma coisa, saber alguma coisa... O número e a harmonia repelem o erro; o falso não combina com sua natureza. O erro e a inveja são filhos do indefinido, sem pensamento, sem razão; a falsidade nunca pode penetrar nos números, é seu eterno inimigo. Somente a verdade se adapta à natureza do número e nasce com ele.

FILOLAU

Podemos olhar para a geometria como uma lógica prática, porque as verdades de que trata, sendo as mais simples e sensíveis de todas, são por isso as mais susceptíveis de uma aplicação fácil e palpável das regras do raciocínio.

D’ALEMBERT

Existem outras verdades além das verdades da álgebra, outras realidades além dos objetos sensíveis. Cultivemos com ardor as ciências matemáticas, sem querer estendê-las para além do seu domínio; e não imaginemos que podemos atacar a história com fórmulas, nem dar, como sanção à moralidade, teoremas de álgebra e cálculo integral.

CAUCHY

SÓCRATES.— Façamos, portanto, uma lei àqueles que estão destinados entre nós a ocupar os primeiros lugares para se aplicarem à ciência do cálculo, para estudá-la, não superficialmente, mas até que, por meio da inteligência pura, consigam conhecer a essência dos números; não usar esta ciência, como os mercadores e negociantes, para vendas e compras, mas aplicá-la às necessidades da guerra e facilitar à alma o caminho que deve conduzi-la da esfera das coisas perecíveis à contemplação da verdade e ser.

GLAUCO: Muito bem.

(...)

SÓCRATES: Se perguntarmos aos que se preocupam com esta ciência: “De quantos vocês estão falando? Onde estão essas unidades tais como vocês supõem que sejam, perfeitamente iguais entre si, sem a menor diferença, e que não são compostas de partes?” Meu caro Glauco, o que você acha que eles respondem?

GLAUCO.—Creio que responderiam que estão falando desses números que não cabem aos sentidos e que não podem ser apreendidos de outra forma senão pelo pensamento.

SÓCRATES: Então você vê, meu caro amigo, que não podemos absolutamente prescindir desta ciência, pois é óbvio que ela obriga a alma a usar o entendimento para conhecer a verdade.

GLAUCO.— É certo que é maravilhosa-mente adequada para produzir este efeito.

SÓCRATES.—Você também observou que aqueles que nascem calculadores, tendo o espírito de combinação, têm grande facilidade para quase todas as outras ciências e que mesmo as mentes pesadas, quando se exercitaram e se acostumaram ao cálculo, pelo menos obtêm esta vantagem? De adquirir maior facilidade e penetração?

GLAUCO: A coisa é assim.

SÓCRATES: Além disso, seria difícil para você encontrar muitas ciências que custassem mais para aprender e estudar em profundidade do que esta.

GLAUCO: Acredito.

SÓCRATES.—Assim, por todas estas razões, não devemos negligenciá-la; mas aqueles que nascem com um caráter excelente devem aplicá-la desde cedo.

GLAUCO.—Eu concordo.

PLATÃO

Aqueles que só vêm na matemática a sua utilidade de aplicação ordinária têm uma ideia muito imperfeita dela; seria, na verdade, adquirir muito pouco com grandes despesas; porque, com exceção de cientistas e alguns artistas, dificilmente vejo alguém que precise de Geometria ou Álgebra uma vez na vida. Não são, portanto, nem as teorias, nem os processos, nem os cálculos em

si, que são verdadeiramente úteis, é a sua sequência admirável, é o exercício que dão à mente, é a boa e fina lógica que aí introduzem para sempre.

A matemática goza desta vantagem inestimável, e sem a qual muitas vezes seria supérfluo estudá-la, é que não é necessário conhecê-la atualmente para sentir suas vantagens, mas basta conhecê-la bem; todas as operações, todas as teorias que nos ensinam podem sair da memória, mas permanecem a precisão e a força que conferem ao nosso raciocínio; o espírito da matemática permanece como uma tocha que nos serve de guia em meio às nossas leituras e pesquisas; é ele quem, dissipando a multidão ociosa de ideias estrangeiras, tão rapidamente nos revela o erro e a verdade; é através dele que as mentes atentas, nas discussões mais irregulares, voltam constantemente ao objeto principal, que nunca perdem de vista; é assim que encurtam o tempo e o tédio, colhem facilmente os frutos das boas obras e passam por aqueles volumes vãos e numerosos onde se perdem as mentes vulgares. Se a matemática encontrou muitos detratores, é porque suas luzes indesejáveis destroem todos os sistemas vãos nos quais as mentes falsas têm prazer. Isto porque se a matemática deixasse de ser a própria verdade, uma série de obras ridículas tornarse-iam muito sérias; muitos até começariam a ser sublimes; mas era muito natural que mentes superiores e os melhores escritores falassem das ciências exatas apenas com uma espécie de admiração; grandes homens, em qualquer gênero, nunca engolem grandes coisas; eles tentam se elevar até lá.

POINSOT

O avanço e a melhoria na matemática estão ligados à prosperidade do Estado.

NAPOLÉÃO

Uma rigorosa disciplina da mente prepara para os deveres militares, e não há dúvida de que os estudos matemáticos contribuem para formar esta faculdade de abstração essencial aos líderes para formar uma representação interna, uma imagem de ação, pela qual avançam, esquecendo o perigo, no tumulto e escuridão do combate.

HERMITE

O que passa pela geometria nos ultrapassa.

PASCAL

Nenhuma investigação humana deveria ser chamada de verdadeira ciência se não envolver demonstrações matemáticas.

LEONARDO DA VINCI

Medir é saber.

KEPLER

A ação dos nossos sentidos e a do nosso entendimento têm limites; o cálculo não tem nenhum.

PORTALIS

Devemos antes confiar no cálculo algébrico do que no nosso julgamento.

EULER

A vida só é boa para estudar e ensinar matemática.

POISSON

A arte é a expressão máxima de uma aritmética interior e inconsciente.

LEIBNIZ

O cálculo é necessário para todos que não sabem, ou que não podem, ou que não querem pensar muito.

DE RAMSAY

Eu compararia de bom grado as luzes da matemática com esses pálidos sóis do norte, sob os quais permanecemos congelados... Eles só fazem florescer flores sem perfume e frutas sem sabor.

DUPANLOUP

A lógica rigorosa, a busca e o amor pela verdade por si só, constituem a parte *moral* da matemática, que, portanto, pertence essencialmente à escola estóica. Oferecer aos jovens, no início da vida, aplicações *úteis*, métodos de *aproximação*, como objeto principal de estudo, é distorcer o objetivo da educação e isso pode ter resultados desastrosos. Contudo, este *rigor* não deve ser confundido com a mania demonstrativa, que,

desconfiando do bom senso, priva o leitor de toda espontaneidade...Saber o que não dizer é uma arte difícil, que raramente encontramos.

O. TERQUEM

Em tudo o que empreendemos, devemos dar dois terços à razão e o outro terço ao acaso. Aumente a primeira fração, você será pusilânime; aumente o segundo, você será imprudente.

NAPOLÉÃO

As transformações da alma são lentas; elas só acontecem com a dor multiplicada pelo tempo.

LE P. DIDON

A matemática pura é uma chave de ouro que abre todas as ciências.

V. DURUY

Criar em nós mesmos a arte do raciocínio, e especialmente do raciocínio geométrico, é apenas uma parte muito pequena da educação. São os sentimentos que nos conduzem, não a lógica ou a geometria.

A. CROISSET

Nada é menos aplicável à vida do que o raciocínio matemático. Uma proposição, em termos de números, é decididamente falsa ou verdadeira; em todos os outros aspectos, a verdade se mistura com a falsidade...

MME DE STAËL

A lógica tomou emprestadas as regras da geometria sem compreender a sua força...Estou longe de colocar os lógicos em paralelo com os geômetras que aprendem a verdadeira maneira de conduzir a razão...Os lógicos professam conduzir até lá, apenas os geômetras conseguem, e fora de sua ciência não há demonstração real.

PASCAL

Pascal confunde arte com ciência e, como os lógicos não conduzem infalivelmente à verdade, ele sacrifica a lógica à sua amada matemática. É Leibniz quem tem toda a razão quando diz, ao contrário de Pascal:

“A lógica dos geómetras é uma extensão ou promoção particular da lógica geral”. A matemática toma emprestado, portanto, o poder da sua forma à lógica, em vez de dar-lhe.

BARTHÉLEMY SAINT-HILAIRE

A razão matemática contenta-se em fornecer, no domínio mais favorável, um tipo de clareza, precisão e consistência cuja simples contemplação familiar pode dispor a mente a tornar outras concepções tão perfeitas quanto a sua natureza o permite.

AUG. COMTE

O gosto pela exactidão, a impossibilidade de se contentar com noções vagas, de se apegar a hipóteses por mais atrativas que sejam, a necessidade de ver claramente a ligação das proposições e o objectivo a que se dirigem, são os frutos mais preciosos do estudo da matemática.

LACROIX

As delicadas nuances das ideias morais escapam ao rigor do raciocínio matemático, e um hábito demasiado exclusivo destes muitas vezes leva a mente a querer reduzir tudo a regras invariáveis, a princípios absolutos; um método bem perigoso, quando o aplicamos ao governo das sociedades humanas, ou apenas às relações específicas que nos ligam a outros homens.

CUVIER

Na Matemática, a censura e a crítica não podem ser permitidas a todos; os discursos dos retóricos e as defesas dos advogados são inúteis.

VIÈTE

Há oito dias vi o primeiro raio de luz; há três anos vi a luz do dia; finalmente, a esta hora, vejo o sol da mais admirável contemplação. Nada mais me detém, abandono-me ao meu entusiasmo; Quero desafiar os mortais pela franca confissão de que roubei os vasos de ouro dos egípcios, para formar um tabernáculo para o meu Deus longe do Egito idólatra. Se sou perdoado, me alegro; se alguém fica irritado, eu me resigno.

A sorte está lançada, estou escrevendo meu livro. Vamos lê-lo na era presente ou no futuro, o que isso importa para mim! Ele pode esperar pelo seu leitor: Deus não esperou seis mil anos para se dar um contemplador das suas obras?

KEPLER

Parece-me que eu era apenas uma criança brincando à beira-mar e encontrando, ora uma pedra mais polida, ora uma concha mais bonita que as outras, enquanto o vasto oceano da Verdade se estendia inexplorado à minha frente.

NEWTON

O único objectivo da Ciência é a honra do espírito humano e, como tal, uma questão da teoria dos números é tão valiosa como uma questão do sistema do mundo.

JACOBI

Alphonse Michel Rebière (Tulle, 1842 – Paris, 1900) foi um defensor das habilidades científicas das mulheres no século XIX. Ele escreveu o livro *Les Femmes dans la science*, publicado em 1894. O artigo de Rebière seguiu o formato de enciclopédia, listando as mulheres em ordem alfabética, dando seus nomes, datas de nascimento, as condições sociais em que viveram, suas contribuições e publicações. Seu trabalho foi revolucionário, pois outros trabalhos com informações semelhantes nunca foram publicados, e ele foi um dos primeiros a incluir mulheres no campo da ciência.

SIMPÓSIO Eventos DMAT Março a Novembro/24

Cristina Lizana, Elaís Cidely, Henrique da Costa e Roberto Sant'Anna

Introdução

Nesta seção SIMPÓSIO faremos uma breve resenha de eventos organizados por membros da comunidade do Departamento de Matemática (DMAT) do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal da Bahia (UFBA) durante o período de março a novembro de 2024.

Projeto PECMat

O projeto de extensão PECMat - “Projeto Egressos dos cursos de Matemática da UFBA, conectando passado, presente e futuro no IME” foi criado em novembro de 2023, ano em que os cursos de Graduação em Matemática da UFBA completaram 80 anos.

Criado com o intuito de honrar a história, as realizações e contribuições do Departamento de Matemática da UFBA, o projeto é coordenado por Elaís Cidely, Elen Deise e Roberto Sant'Anna, todos egressos e atuais professores do DMAT. Elaís Cidely tem bacharelado e mestrado em Matemática pela UFBA e doutorado pelo IMPA; Elen Deise é licenciada em Matemática pela UNEB, com mestrado e doutorado pela UFBA; e Roberto Sant'Anna concluiu a licenciatura, o bacharelado, o mestrado e o doutorado em Matemática pela UFBA. O projeto também encoraja a participação e envolvimento de estudantes atuais dos cursos de Matemática da UFBA. Atualmente, conta com a contribuição de Ravilla Miranda, estudante do curso de licenciatura em Matemática à distância da UFBA, que atua como monitora voluntária no projeto.

O PECMat busca estabelecer e fortalecer a conexão



Figura 1: Coordenadores do projeto com as palestrantes Luciana Salgado e Tamires Purificação, dias 12 de março e 13 de maio de 2024, respectivamente.

entre a comunidade acadêmica do IME, seus egressos e a sociedade em geral. Para isso, as primeiras ações do projeto incluíram a coleta de dados sobre egressos dos cursos de graduação e pós-graduação em Matemática da UFBA. E a partir de março de 2024, o projeto passou a realizar diversas palestras no auditório do IME, ministradas por egressos do IME que hoje atuam em diferentes instituições, como UFBA, UFRJ, IFBaiano e USP/UFSCar. Na ocasião, eles compartilham e divulgam sobre seus projetos, suas trajetórias e suas experiências acadêmicas e profissionais

com outros egressos e atuais docentes e discentes da UFBA e outras instituições. Essas palestras contribuem de forma significativa para a formação dos nossos atuais estudantes.

Entre os palestrantes, destacam-se matemáticos com longa trajetória em suas carreiras, como Luciana Salgado (UFRJ), Evandro Santos (UFBA), Graça Luzia (UFBA), Carlos Bahiano (UFBA) e Manuela Souza (UFBA), além de jovens pesquisadores como Tamires Purificação (UFRJ), Leandro Teixeira (IFBaiano) e Fernando Moraes (USP/UFSCar).

Ao final de cada palestra, acontece o tradicional sorteio de um livro entre os participantes do auditório, além do *coffee break*, que serve como mais uma oportunidade única de interação entre membros internos e externos à comunidade do IME e os nossos egressos.



Figura 2: Participantes ao final das palestras dos professores Manuela Souza e Carlos Bahiano, dias 20 de agosto e 17 de outubro de 2024, respectivamente.

Além disso, para ampliar o alcance dessa importante troca de conhecimentos entre diferentes gerações de matemáticos, as gravações das palestras são disponibilizadas no canal do DMAT no YouTube (@dmatufba), possibilitando que o público externo da UFBA também tenha acesso ao conteúdo.

Além dos já tradicionais convites a egressos para realizarem palestras no IME, o projeto também pretende realizar outras atividades, como Mesas de Discussão, Encontro de Egressos e Oficinas.

Por fim, um dos desafios desta iniciativa é aprimorar as ferramentas para coletar e organizar de forma

eficiente os dados sobre os discentes que passaram pelo IME: além de contribuir com a nossa instituição, este mapeamento poderá nos ajudar a alcançar e realizar atividades com um número cada vez maior de egressos ao redor de todo Brasil e do mundo. Portanto, se você é egresso do IME - UFBA e quer ajudar a fortalecer essa rede de conexões e histórias, entre em contato com a coordenação do projeto!

Para mais informações, acesse o instagram do DMAT: @dmatufba.

2º Workshop África e Matemática: Conexões com aporte para o ensino

O segundo volume da Revista de Matemática Hipátia apresentou o coletivo Ondjango Asili, reconhecido por suas ações significativas na UFBA e em escolas de Educação Básica de Salvador e região metropolitana. Após o sucesso do “1º Workshop África e Matemática: Conexões com aporte para o ensino”, realizado remotamente em 2022, o coletivo trouxe para os espaços da universidade o “2º Workshop África e Matemática: Conexões com aporte para o ensino”, realizado de 17 a 20 de abril de 2024.



Figura 3: Professora Simone Moraes.

O evento contou com uma programação diversa, iniciada com a palestra “Ondjango Asili - Jogos e elementos culturais africanos no ensino de Matemática”, ministrada pela coordenadora do coletivo, Prof.^a Simone Moraes, no auditório do IME-UFBA. Mesmo local em que foi realizada uma inspiradora roda de conversa sobre “A experiência da disciplina ACCS *Cultura*

e *Jogos Africanos no Ensino da Matemática*”, envolvendo estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFBA que cursaram a referida disciplina no segundo semestre de 2023. Esse momento propiciou trocas enriquecedoras e reflexões sobre práticas pedagógicas inovadoras, no contexto da Lei 10.639/03, conectando experiências acadêmicas e culturais.



Figura 4: Estudantes na mesa de discussão “A experiência da disciplina ACCS Cultura e Jogos Africanos no Ensino da Matemática”.

No *workshop* foram promovidas atividades que aliaram aprendizado e lazer, como oficinas e torneios de jogos africanos de tabuleiros quadriculados e da família mancala. A programação incluiu ainda uma sessão de pôsteres no saguão do IME, na qual bolsistas e estudantes do projeto apresentaram trabalhos desenvolvidos no projeto e na disciplina ACCS, ressaltando o vínculo entre universidade e escolas da Educação Básica.



Figura 5: Participantes do primeiro dia do Workshop.

No último dia do evento, houve uma exposição das oficinas realizadas na disciplina *Cultura e Jogos Africanos no Ensino da Matemática*, destacando os resultados obtidos pelos estudantes, as atividades criadas na disciplina e as aplicações em escolas públicas de

Salvador e região metropolitana. Em seguida, no auditório da FACOM, ocorreu uma mesa de discussão intitulada “A experiência de participar do PAPIC-EF, Programa de Apoio a Projetos e Iniciação Científica em Matemática”, com os professores Henrique Santiago, Marcus Vinicius Lopes e Susana Quirino, na qual compartilharam com a audiência os impactos da participação neste programa.



Figura 6: Torneio de jogos africanos.

O “2º Workshop — África e Matemática” reafirmou a importância do Ondjango Asili e suas contribuições para um ensino de Matemática mais inclusivo, conectando Matemática e África, através da valorização da cultura e dos saberes africanos como elementos transformadores no processo de ensino e aprendizagem.

XXIII Encontro Brasileiro de Topologia

O XXIII Encontro Brasileiro de Topologia aconteceu de 29 de julho a 03 de agosto de 2024 no IME-UFBA (Fig. 7). O evento bienal é tradição no calendário da Matemática: desde 1979 vem reunindo pesquisadores, professores e alunos de variadas regiões do Brasil e do exterior. Os principais tópicos que têm sido abordados são: folheações, ações localmente livres de grupos, cohomologia limitada, classes características, grupos de bordismo, singularidades, teoria de ponto fixo e outros tópicos na interface da Topologia Algébrica e Diferencial.

Neste ano foram realizados 4 mini-cursos (2 básicos e 2 avançados), 20 palestras, 25 comunicações curtas e apresentação de 40 pôsteres, além da promoção de um evento satélite, o 1º Workshop Invernal de Topologia e Teoria dos Conjuntos (WITTC) da UESC, na Universidade de Santa Cruz, realizado entre os dias 5 e 7 de agosto de 2024 em Ilhéus-BA.

Os principais objetivos do EBT são divulgar os recentes avanços da área de Topologia e fomentar e fortalecer novas colaborações para projetos de pesquisa, criando elos entre brasileiros e estrangeiros.

Mais informações sobre o XXIII EBT podem ser encontradas em <https://xxiiiebt.ime.ufba.br>. Informações gerais sobre o EBT podem ser encontradas na página <https://www.dm.ufscar.br/profs/ebt>.

A XXIV edição do EBT ocorrerá em 2026 na UFES, Vitória-ES.



Figura 7: Participantes no XIII Encontro Brasileiro de Topologia.

27ª Escola Brasileira de Probabilidade

A Escola Brasileira de Probabilidade é, sem dúvida, um dos eventos mais importantes no mundo nessa área de pesquisa. A 27ª edição deste ano ocorreu em Salvador, Bahia, de 05 a 09 de agosto de 2024 (Fig. 8). Essa foi apenas a segunda vez que o evento foi realizado na região nordeste do país e a primeira vez na Bahia.



Figura 8: Participantes na 27ª Escola Brasileira de Probabilidade.

Ao todo, 109 estudantes, jovens pesquisadores e professores participaram do evento, representando uma ampla diversidade de países, como Brasil, Argentina, Peru, Chile, Uruguai, Estados Unidos, Holanda, Itália, Reino Unido, Alemanha, França, Suíça, China e

Coreia do Sul. Esse panorama internacional destaca a relevância do evento para a área de estudo.

A programação incluiu dois minicursos, oito plenárias, cinco comunicações curtas e várias sessões de pôsteres. Os minicursos foram conduzidos por Frank den Hollander (Leiden University, Holanda), abordando avanços recentes em sistemas de partículas interagentes em grafos, e por Alessandra Ciprian (University College London, Reino Unido), que tratou do Cálculo Grassmanniano na Teoria da Probabilidade. As palestras plenárias foram ministradas por Hubert Lacoin (IMPA, Brasil), Gioia Carinci (Università di Modena e R. Emilia, Itália), Leonardo Rolla (USP, Brasil), Marielle Simon (Université Lyon 1, França), Alexandre Stauffer (King's College London, Reino Unido), Inés Armendariz (Universidad de Buenos Aires, Argentina), Franco Severo (ETH Zürich, Suíça) e Lisa Hartung (Universitaet Mainz, Alemanha). Além disso, jovens pesquisadores também tiveram a oportunidade de apresentar palestras curtas sobre seus tópicos de interesse.

Finalmente, o evento também contou com momentos de confraternização, como um coquetel no primeiro dia e um jantar de encerramento, proporcionando um ambiente propício para a socialização e o fortalecimento de laços entre os participantes.

Mais informações sobre a escola podem ser encontradas no site <https://ebp.ufba.br>.

Prêmio PIBIC&T UFBA 2024

O Prêmio UFBA PIBIC&T 2024 é oferecido pela Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da Universidade Federal da Bahia aos trabalhos selecionados pelos Comitês Interno e Externo do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica no ciclo do edital PIBIC&T 2022-2023.

A Bacharel em Matemática, Gabriela Kipper Paim, ex-aluna de nossos cursos de Matemática, recebeu uma menção honrosa na área de Ciências Exatas e da Terra pelo trabalho desenvolvido no Programa de Iniciação Científica 2022-2023, sob a orientação da professora Cristina Lizana Araneda.

A cerimônia de entrega do prêmio aconteceu no dia 12 de setembro de 2024, no Salão Nobre da Reitoria (Fig. 9). A palestra de abertura foi proferida pela professora Helena Nader, Presidente da Academia Brasileira de Ciências, com o título “A importância da Iniciação Científica para a Pesquisa Brasileira”, destacando o papel fundamental da iniciação científica no desenvolvimento da pesquisa no país.

Foi um momento festivo, com a UFBA reconhe-

cendo a excelência de seus bolsistas e orientadores de Iniciação Científica e Tecnológica, marcando o início do novo ciclo 2024-2025.



Figura 9: Cerimônia de Premiação.

Para mais informações sobre a Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação (PRPPG) acesse <https://prppg.ufba.br/>, ou sobre o Programa de Pós-graduação em Matemática da UFBA acesse <https://pgmat.ufba.br/>.

Workshop 2+3 in Dynamics - Joint 2nd Workshop Nordestino de Sistemas Dinâmicos and 3rd Jangada Dinâmica

Entre os dias 16 e 20 de setembro de 2024, Aquiraz, no Ceará, sediou um encontro de pesquisadores em Matemática dedicados à área de Sistemas Dinâmicos. O Workshop 2+3 in Dynamics - Joint 2nd Workshop Nordestino de Sistemas Dinâmicos and 3rd Jangada Dinâmica, evento conjunto que uniu o 2º Workshop Nordestino de Sistemas Dinâmicos (promovido pela UFBA), e o 3º Jangada Dinâmica (promovido pela Universidade Federal do Ceará [UFC]), proporcionou uma atmosfera rica em discussões, colaborações e avanços na área, bem como reforçou a parceria entre as duas instituições do Nordeste brasileiro (Fig. 10).

O comitê organizador foi formado por Aline Melo (UFC), Cristina Lizana (UFBA), Elaís Malheiro (UFBA), Edgar Matias (UFBA), Mauricio Poletti (UFC), Roberto Sant'Anna (UFBA) e Yuri Lima (UFC). O evento contou com a participação de pesquisadores de diversas instituições do Nordeste, do Brasil e de diversos países, promovendo a integração e o intercâmbio de conhecimentos entre os cerca de 80 participantes.

O Workshop 2+3 in Dynamics evidenciou a diversidade da Teoria de Sistemas Dinâmicos, com pa-



Figura 10: Participantes no Workshop 2+3 in Dynamics.

lestras que exploraram desde formalismo termodinâmico, com foco em operadores de transferência e medidas invariantes em certos espaços, até dinâmica hiperbólica, com a investigação sobre condições para garantir existência de hiperbolicidade em certos sistemas dinâmicos. Sistemas parcialmente hiperbólicos e teoria ergódica também foram temas de destaque, com estudos sobre difeomorfismos e aplicações em bilhares caóticos.

O evento contou com 16 plenárias de pesquisadores internacionais, sendo 6 delas ministradas por mulheres. Além das palestras, o evento contou com três sessões de apresentação de pôsteres e momentos de discussão, incentivando o intercâmbio de ideias e a colaboração entre os presentes. Gostaríamos de dar destaque à delegação da UFBA, formada por docentes e discentes de graduação, mestrado e doutorado (Fig. 11).



Figura 11: Delegação da UFBA no Workshop 2+3 in Dynamics.

Além do aprofundamento teórico, o evento estimu-

lou a colaboração entre pesquisadores, abrindo caminhos para novas parcerias e projetos de pesquisa. O Workshop 2+3 in Dynamics consolidou-se como um importante fórum para o desenvolvimento e a disseminação da pesquisa em Sistemas Dinâmicos no Nordeste do Brasil, contribuindo significativamente para o avanço da área no país.

Para mais informações sobre o Workshop 2+3 in Dynamics, acesse o site <https://sites.google.com/view/workshop23indynamics>.

3º Encontro Brasileiro de Mulheres Matemáticas

De 13 a 16 de novembro de 2024, a Universidade Federal da Bahia teve o privilégio de sediar o “3º Encontro Brasileiro de Mulheres Matemáticas” (3º EBMM), evento que teve coordenação da Prof.^a Simone Moraes, do Departamento de Matemática da UFBA. O evento teve as edições anteriores realizadas no Rio de Janeiro em 2019 e em Belém do Pará em 2022, consolidando-se como um espaço para discussão sobre a questão de gênero na Matemática, bem como de divulgação e promoção da Matemática desenvolvida por mulheres no Brasil.

Com o objetivo de fortalecer a integração, promover discussões sobre inclusão e destacar o papel das mulheres na Matemática em todo o Brasil, o evento mostrou o seu alcance nacional já na organização, com comissão organizadora integrada por Simone Maria de Moraes (UFBA), Barbara Corominas Valério (USP), Elaís Cidely Souza Malheiro (UFBA), Elen Deise Assis Barbosa (UFBA), Janice Pereira Lopes (UFG), Juliana Silva Canella (UFPA), Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda (UFAM), Manuela da Silva Souza (UFBA) e Sylvia Ferreira da Silva (UFRPE) e comitê científico composto por Adriana Neumann de Oliveira (UFRGS), Alice de Jesus Kozakevicius (UFSM), Ana Paula de Araújo Chaves (UFG), Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita (UNIFESP), Juliana Fernandes da Silva Pimentel (UFRJ), Kátia Maria de Medeiros (UEPB), Kelly Karina Santos (UFRR), Manuela da Silva Souza (UFBA), Simone de Almeida Delphim Leal (UNIFAP) e Vanessa Franco Neto (UFMS).

Nesta edição o evento teve uma abrangência expressiva, contando com quase 250 participantes, vindas de todas as regiões do Brasil e a organização preparou uma programação ampla e diversa, proporcionando momentos para uma intensa interação entre estudantes, jovens pesquisadoras e matemáticas experientes. O evento foi um espaço para a divulgação de pesquisas científicas, projetos inovadores e inici-



Figura 12: Comissão Organizadora do 3º EBMM.

ativas transformadoras, além das trocas significativas de conhecimentos e vivências.



Figura 13: Participantes no auditório do IME.

A programação incluiu quatro palestras de pesquisadoras de destaque no cenário nacional e internacional e seis palestras curtas apresentadas por jovens pesquisadoras, que trouxeram temas relevantes e atuais da Matemática em geral. Além disso, o evento contou com quatro sessões de pôsteres, que reuniram cerca de 90 trabalhos das áreas de Educação e Ensino de Matemática, Matemática e Matemática Aplicada, e Gênero.

Um destaque significativo do 3º EBMM foram as

três mesas de discussão, que abordaram temas centrais sobre desigualdades de gênero e étnico-racial na academia, equidade e inclusão na comunidade Matemática brasileira e desafios e conquistas de mulheres em suas trajetórias na Matemática. Também se destacaram as duas sessões de “Projetos de Inclusão, de Divulgação e de Outras Iniciativas”, nas quais foram apresentados projetos voltados a motivar e fortalecer a presença de meninas e jovens mulheres na Matemática e ciências exatas. Além disso, vídeos curtos com relatos de vivências de mulheres na Matemática enriqueceram as reflexões ao longo do evento.



Figura 14: Registro de uma das mesas de discussão.

Programação à parte, dois destaques no evento foram: a participação expressiva de estudantes da UFBA foi um ponto a se comemorar, muitas(os) se incorporaram à organização local imprimindo um pouco de baianidade nos detalhes, desde a recepção, com os materiais de credenciamento, até os momentos de intervalos e de confraternização e, não menos importante, foi o primeiro encontro presencial das mulheres do coletivo “Matemáticas Negras”, no 3º EBMM.



Figura 15: Registro de encontros das participantes.

Assim, mantendo a filosofia das edições anteriores, o encontro logrou reunir mulheres de diversas áreas da Matemática, desde estudantes do ensino médio até pesquisadoras experientes, consolidando-se ainda mais como um espaço de fortalecimento, empoderamento e união, mostrando o brilho, a força e o impacto das mulheres na Matemática e reafirmando seu papel transformador no cenário acadêmico e científico do Brasil.

O 3º EBMM foi um sucesso, com vários momentos emocionantes, muitos abraços e sobretudo celebração das mulheres na matemática. Finalizou deixando um gostinho de saudade.

Que venha a quarta edição!

IX Encontro da Pós-graduação em Matemática da UFBA

Entre os dias 18 e 22 de novembro de 2024, foi realizado o IX Encontro da Pós-graduação em Matemática da UFBA (EPGMAT) no Instituto de Matemática e Estatística (IME) da UFBA (Fig. 16). O EPGMAT foi uma experiência transformadora, marcada por aprendizado, troca de ideias e conexões significativas.



Figura 16: IX Encontro da Pós-graduação em Matemática da UFBA.

O evento contou com palestras ministradas por professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFBA e também por convidados externos, que abordaram temas de pesquisa de ponta, inspirando os participantes a expandirem seus horizontes acadêmicos. As comunicações orais e as sessões de pôsteres também desempenharam um papel central, oferecendo um espaço dinâmico para a divulgação de pesquisas, a troca de ideias e a construção de parcerias colaborativas. Entre as atividades, destacaram-se ainda três minicursos oferecidos, com especial ênfase para “Python para Matemáticos”, explorando novas aplicações tecnológicas no campo da Matemática e Estatística.

O encontro acontece no segundo semestre de cada ano letivo, é organizado e dirigido a docentes, pesquisadores e alunos dos cursos de pós-graduação de programas de Matemática e Estatística, tanto da UFBA como de outras instituições de ensino superior no Brasil. No entanto, alunos de cursos de graduação também são bem vindos e são incentivados a participar do encontro.

Os principais objetivos do encontro são a divulgação e aprofundamento do conhecimento em Matemática e Estatística e o fomento à interação entre alunos e professores, participantes e convidados, buscando a integração entre a comunidade acadêmica dos programas de pós-graduação do IME com a comunidade externa à UFBA, contribuindo para a difusão da Matemática, Estatística e áreas afins.

Na IX edição foram apresentadas 14 palestras, 3 minicursos, 1 mesa redonda, 17 comunicações orais de discentes do doutorado e 30 pôsteres de discentes da graduação e do mestrado. Uma das principais novidades desta edição foi a participação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que integrou o encontro pela primeira vez, trazendo perspectivas enriquecedoras e fomentando a interação entre diferentes públicos.

Mais do que um encontro científico, o IX EPGMAT reafirmou seu papel como um espaço de crescimento, colaboração e valorização da matemática em suas diversas dimensões.

Para mais informações sobre o Encontro da Pós-graduação em Matemática da UFBA, acesse <https://encontropgmat.ufba.br>.

Olimpíadas de Matemática: um ano de conquistas e desafios

As Olimpíadas de Matemática estão estabelecidas na cultura escolar do Brasil. A OBMEP, desde 2005, fomenta a discussão científica e a descoberta de novos talentos, aumentando a cada ano o número de escolas e alunos participantes. Já a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), realizada pela Associação Olimpíada Brasileira de Matemática (AOBM), com apoio da UFBA, e voltada para alunos desde o 6º ano do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, é a principal porta de entrada para competições internacionais. Outra competição que se faz presente no âmbito estadual é a Olimpíada de Matemática do Estado da Bahia (OMEBA), coordenada pelos professores do DMAT Henrique Barbosa, Roberto Sant'Anna e Samuel Feitosa. Vale ressaltar que essa competição

está habilitada para ser uma das maneiras de participar da OBM.

O Departamento de Matemática e o Instituto de Matemática e Estatística da UFBA têm sido protagonistas nesse cenário, organizando e apoiando diversos eventos relacionados às Olimpíadas de Matemática. Acreditamos que essas iniciativas são fundamentais para a formação dos estudantes, incentivando o desenvolvimento do raciocínio lógico, a criatividade e o gosto pela Matemática. As Olimpíadas de Matemática promovem a inclusão social, despertam a curiosidade científica e revelam jovens talentos, tanto em nível nacional quanto local.

Em Salvador e Região Metropolitana, o DMAT e o IME têm concentrado esforços para o crescimento e desenvolvimento das Olimpíadas de Matemática, apoiando projetos como a OBM, OBMEP, OMEBA e OFMEBA, entre outras iniciativas, e também organizando e realizando eventos como cerimônias de premiação, aulões e visitas em diversos setores da sociedade ligados à educação, tendo em vistas contribuir com os mesmos de forma positiva. A seguir, apresentamos os destaques do período.

Cerimônia de Premiação da OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um projeto de grande relevância nacional, despertando o interesse e o entusiasmo pela matemática em estudantes de escolas públicas de todo o país. O DMAT tem um papel fundamental na organização da OBMEP em nível local, atuando na aplicação das provas e na realização da Cerimônia de Premiação Regional.



Figura 17: Alunos e convidados para a Cerimônia de Premiação da OBMEP.

No dia 17 de junho de 2024, o Salão Nobre da Reitoria da UFBA foi palco da Cerimônia de Premiação da OBMEP, reunindo cerca de 150 pessoas, entre alu-

nos medalhistas de ouro, prata e bronze de Salvador e Região Metropolitana, seus familiares, professores e convidados. O evento celebrou o talento e a dedicação desses jovens, reconhecendo seus esforços e incentivando a busca por novos desafios.

A cerimônia contou com a presença do Reitor da UFBA, Paulo Cesar Miguez de Oliveira, e do Diretor do IME, Kleyber Mota, além de outras autoridades e representantes da comunidade acadêmica. A mesa foi composta por Roberto Sant'Anna, Coordenador Regional da OBMEP; Rosilene Cavalcante, Superintendente de Políticas Públicas para a Educação Básica da SEC-BA; Isnard Araújo, vereador da cidade de Salvador; Isabela Cavalcanti, representante da SMED-Salvador; e Patrícia Ribeiro, Coordenadora Pedagógica do NTE 26.



Figura 18: Mesa principal da Cerimônia, contando com a presença do Reitor da UFBA, Paulo Cesar Miguez de Oliveira.

O Duo VibraCor, formado pelos professores da UFBA Ricardo Camponogara e Aquim Sacramento, abrilhantou a cerimônia com belas canções, emocionando a todos os presentes.

Aulão Olímpico: Superando Desafios em Matemática

O projeto de extensão “Aulão Olímpico: Superando Desafios em Matemática”, do DMAT, visa fortalecer a cultura de Matemática Olímpica na região, proporcionando uma experiência enriquecedora para jovens apaixonados por desafios. No dia 17 de outubro de 2024, o IME abriu suas portas para 85 estudantes de escolas públicas de Salvador e Camaçari, em um dia dedicado à descoberta e ao aprofundamento da matemática.

Os alunos participaram de aulas desafiadoras em diferentes níveis, explorando o universo das Olimpíadas de Matemática e aprimorando suas habilidades.



Figura 19: Momento da fala acolhedora da psicóloga Taíris Araújo com os estudantes.

A psicóloga Taíris Araújo conduziu uma sessão especial sobre gestão emocional para provas, auxiliando os estudantes a lidarem com a ansiedade e a alcançarem seu máximo potencial. A visita ao Planetário da UFBA complementou a experiência, despertando a curiosidade e mostrando a conexão da matemática com outras áreas do conhecimento.



Figura 20: Visita dos estudantes do Aulão ao Planetário da UFBA.

O Aulão Olímpico busca não apenas fortalecer as habilidades matemáticas dos estudantes, mas também inspirá-los a vislumbrar a universidade como um espaço acessível e possível. O projeto reuniu estudantes, professores e colaboradores em um ambiente de aprendizado, colaboração e paixão pela matemática, impactando positivamente a comunidade e abrindo portas para novas oportunidades.

OMEBA, OFMEBA e outras iniciativas

A Olimpíada de Matemática do Estado da Bahia

(OMEBA) e a Olimpíada Feminina de Matemática do Estado da Bahia (OFMEBA) também foram destaques no ano de 2024. As provas da OMEBA, realizadas em 25 de agosto de 2024, contaram com a participação de 600 estudantes em diversos polos de aplicação na Bahia.

A cerimônia de premiação da OFMEBA, realizada em 10 de setembro de 2024, foi recheada de momentos de grande emoção para as medalhistas, que celebraram suas conquistas ao lado de professores, familiares e autoridades. O DMAT atuou como parceiro na organização desse evento, que é coordenado pelo professor Acélio Rodrigues (IFBA), contribuindo para o sucesso das Olimpíadas. A OFMEBA, em especial, tem um papel fundamental no incentivo à participação feminina na matemática, mostrando que as meninas também podem se destacar nessa área.

O DMAT também esteve presente em outras iniciativas relacionadas às Olimpíadas de Matemática. Em 25 de setembro de 2024, participamos como parceiros da Cerimônia de Premiação Regional da Secretaria Municipal de Educação de Salvador (SMED), celebrando o talento e a dedicação dos estudantes premiados.

E para o futuro?

Para as próximas edições das Olimpíadas de Matemática, esperamos ampliar o alcance das atividades, aumentar a participação dos estudantes e promover novas iniciativas que contribuam para o desenvolvimento da educação matemática na Bahia.

Para mais informações sobre as Olimpíadas de Matemática em Salvador e Região Metropolitana, visitem o perfil do projeto Matemática Olímpica no Instagram: @mat.olimpica.



Henrique da Costa é mineiro, cursou graduação e pós-graduação no ICMC-USP em São Carlos, interior de São Paulo, e está na UFBA em Salvador desde 2016. Atua na área de pesquisa em análise, mais precisamente sistemas dinâmicos não-lineares e equações diferenciais parciais. Estuda piano e jogos de cartas e tabuleiro como hobby. Foi cabeludo durante a pandemia, no entanto não se atreveu a ser padeiro.



Cristina Lizana é venezuelana, com graduação e mestrado em Matemática pela Universidad de Los Andes-ULA (Venezuela), e doutorado em Matemática pelo IMPA (Brasil). Foi professora da ULA (2004-2017) e trabalha na UFBA desde 2018. Pesquisa na área de Sistemas Dinâmicos, atuando principalmente em Dinâmica Parcialmente Hiperbólica e mapas robustamente transitivos. Atualmente, é a coordenadora do Núcleo de Extensão do IME e vice-coordenadora do Mestrado em Matemática. O seu hobby é a fotografia e a estreita relação desta com a matemática.



Elaís Cidely é baiana, nascida na cidade de Macaúbas. Possui graduação e mestrado em matemática pela UFBA, doutorado em matemática pelo IMPA e, desde 2015, é professora do IME-UFBA. Sua área de pesquisa é Sistemas Dinâmicos, com ênfase em Teoria Ergódica. Atualmente, é coordenadora local do PICME-UFBA e vice-coordenadora institucional do PROFMAT-UFBA. Na adolescência, tocou bateria em uma banda do colégio. Durante o doutorado, tocou alfaia em um grupo carioca de maracatu. Mas desde 2021, tem o CrossFit como parte indispensável da sua rotina.



Roberto Sant'Anna é nascido e criado em Salvador, Bahia. É doutor em Matemática Pura pela UFBA e atualmente é professor adjunto no Instituto de Matemática Estatística da UFBA e também Coordenador Regional da OBMEP. Tem realizado pesquisas na temática de Otimização Ergódica, dentro da área de Sistemas Dinâmicos e também tem atuado em diversos projetos tendo em vistas a divulgação da Matemática. Nas horas vagas, é amante da música e busca através dela se expressar por meio do teclado ou piano, instrumentos que tanto admira.

PROBLEMA

O Encontro na Cafeteria e Outros Problemas

Yure Carneiro e Samuel Feitosa

Soluções da Edição Anterior

Problema 1. Calcule o valor de $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^{2022}}$ é

Solução. Seja

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^{2022}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{2022} dx}{(\operatorname{sen} x)^{2022} + (\cos x)^{2022}} \end{aligned}$$

Com a mudança de variável $y = \pi/2 - x$, temos $dy = -dx$ e

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/2}^0 \frac{(\cos(\pi/2 - y))^{2022} (-dy)}{(\operatorname{sen}(\pi/2 - y))^{2022} + (\cos(\pi/2 - y))^{2022}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{(\operatorname{sen} y)^{2022} dy}{(\operatorname{sen} y)^{2022} + (\cos y)^{2022}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\operatorname{sen} x)^{2022} + (\cos x)^{2022} dx}{(\operatorname{sen} x)^{2022} + (\cos x)^{2022}} = \frac{\pi}{2}.$$

Assim, $I = \frac{\pi}{4}$.

Problema 2. Encontre o valor de

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos x) dx + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x) dx.$$

Solução. Com a mudança de variável $y = \pi/2 - x$, temos $dy = -dx$ e

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x) dx &= \int_{\pi/2}^0 \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}(\pi/2 - y)) (-dy) \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(\cos y) dy \end{aligned}$$

Como $\cos^2(\cos x) + \operatorname{sen}^2(\cos x) = 1$, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos x) dx + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x) dx &= \\ \int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos x) dx + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(\cos x) dx &= \\ \int_0^{\pi/2} 1 dx &= \pi/2 \end{aligned}$$

Problema 3. Seja $A_{2022} = (a_{ij})$ a matriz 2022×2022 definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{3}, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Encontre o valor de $\det A_{2022}$.

Solução. Defina como A_n uma matriz $n \times n$ definida pelas mesmas regras e seja $D_n = \det A_n$. Pelo desenvolvimento do determinante pela regra de Laplace com relação a primeira linha, temos

$$D_n = \sqrt{3}D_{n-1} - D_{n-2}.$$

A equação característica é

$$x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0,$$

que possui como raízes $\frac{\sqrt{3} \pm i}{2} = -iw$ ou iw^2 . Aqui

$w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ é raiz cúbica da unidade, i.e., $w^3 = 1$. Resolvendo a recorrência, encontramos

$$D_n = \frac{(-iw)^{2n+2} - 1}{(-iw)^n((-iw)^2 - 1)}$$

Daí, usando que $w^3 = 1$ e $w^2 + w + 1 = 0$, temos

$$\begin{aligned} D_{2022} &= \frac{(-iw)^{4046} - 1}{(-iw)^{2022}((-iw)^2 - 1)} \\ &= \frac{-w^2 - 1}{-(-w^2 - 1)} \\ &= \frac{w}{-w} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Problema 4. Sejam $z = e^{\frac{2\pi i}{2023}} = \cos \frac{2\pi}{2023} + i \sin \frac{2\pi}{2023}$,

$$A = \{1, z, z^2, \dots, z^{2022}\}$$

e

$$B = \{1, 1+z, 1+z+z^2, \dots, 1+z+z^2+\dots+z^{2022}\}.$$

Determine o número de elementos de $A \cap B$.

Solução. Provaremos que $A \cap B = \{1\}$. Inicialmente, é claro que $1 \in A \cap B$. Por outro lado, veremos que não há outros elementos na interseção. Para isso, vamos mostrar que $|1+z+z^2+\dots+z^n| \neq 1$ para todo $1 \leq n \leq 2022$. Veja que

$$1+z+z^2+\dots+z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$

e, portanto,

$$|1+z+z^2+\dots+z^n| = \frac{|z^{n+1}-1|}{|z-1|}.$$

Usando que $e^{i\theta} - 1 = 2i \sin(\theta/2)e^{i\theta/2}$, segue que

$$|1+z+z^2+\dots+z^n| = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2023}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2023}\right)}.$$

Para $1 \leq n \leq 2022$, temos que $\sin((n+1)\pi/2023) \geq 0$ e $\sin(\pi/2023) > 0$. Dessa forma, só poderíamos ter $|1+z+z^2+\dots+z^n| = 1$ caso $\sin((n+1)\pi/2023) = \sin(\pi/2023)$, o que é impossível para $1 \leq n \leq 2022$.

Problema 5. O famoso Problema da Basileia¹ nos permite descobrir que

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Vamos usar a série anterior para encontrar a soma de outra série. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina como a_n seu maior

¹Euler foi o primeiro a provar que

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Além dele, alguns membros da família Bernoulli, que também viviam na cidade da Basileia, tentaram obter esse resultado. Por conta disso esse resultado também ficou atrelado ao nome da cidade.

divisor positivo ímpar. Por exemplo, $a_{30} = 15$ e $a_{24} = 3$. Encontre o valor da soma:

$$S = \frac{a_1}{1^3} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{3^3} + \dots$$

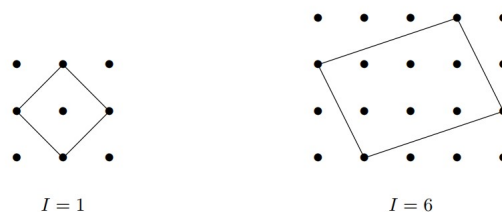
Solução. Considere as séries geométricas

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^3} + \frac{1}{(1 \cdot 2)^3} + \frac{1}{(1 \cdot 2^2)^3} + \frac{1}{(1 \cdot 2^3)^3} + \dots &= \frac{8}{7} \\ \frac{1}{1^3} + \frac{1}{(3 \cdot 2)^3} + \frac{1}{(3 \cdot 2^2)^3} + \frac{1}{(3 \cdot 2^3)^3} + \dots &= \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{3^2} \\ \frac{1}{5^3} + \frac{1}{(5 \cdot 2)^3} + \frac{1}{(5 \cdot 2^2)^3} + \frac{1}{(5 \cdot 2^3)^3} + \dots &= \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{5^2} \\ \frac{1}{7^3} + \frac{1}{(7 \cdot 2)^3} + \frac{1}{(7 \cdot 2^2)^3} + \frac{1}{(7 \cdot 2^3)^3} + \dots &= \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{7^2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Cada fração $\frac{a_n}{n^3}$ aparece exatamente uma vez em cada uma dessas séries. Portanto, a soma desejada é:

$$\frac{8}{7} \cdot \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) = \frac{8}{7} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{7}.$$

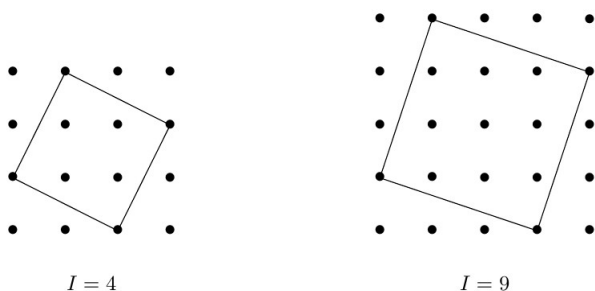
Problema 6. Bernardo está brincando de desenhar quadriláteros em um papel pontilhado como o da imagem a seguir. Os pontos pretos são vértices de quadrados de lado 1 cm e os quadriláteros desenhados só podem usar como vértices os pontos pretos.



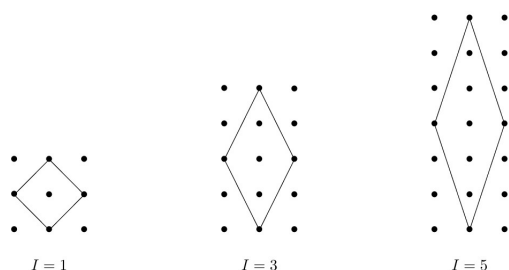
A letra I representa o número de pontos pretos no interior de cada quadrilátero.

- Dê exemplos, por meio de um desenho, de quadrados com $I = 4$ e $I = 9$ no papel pontilhado.
- Explique como Bernardo pode desenhar losangos contendo qualquer valor de pontos interiores desejado.
- Qual é a menor área possível para um triângulo com vértices nos pontos do papel?

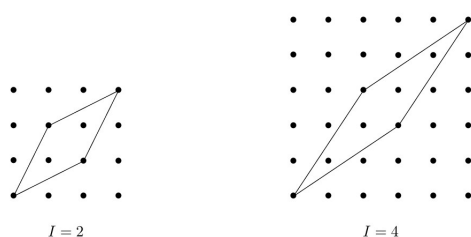
Solução. a) Dois quadrados, um com $I = 4$ e outro com $I = 9$:



b) Se I é um número ímpar, podemos dispor $I+2$ pontos consecutivos na vertical e marcar como vértices do losango os extremos dessa sequência. Os outros dois vértices são os pontos nas verticais anterior e sucessora mais próximos do centro da sequência de pontos, como indicado nas figuras a seguir:



Se I é um número par, considere uma diagonal de $I+2$ pontos consecutivos formando 45° com os lados do papel do reticulado. Os dois pontos extremos dessa diagonal serão vértices do losango. Os outros dois vértices são os 2 pontos mais próximos do centro da diagonal, como indicado nas figuras a seguir:

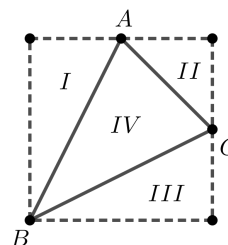


c) Dado qualquer triângulo com vértices nos reticulados, se dois de seus vértices estão na horizontal ou vertical (em relação aos lados do papel), a distância entre eles é um número inteiro b . A altura h do terceiro vértice a esses dois também é um inteiro h . A área do triângulo é, portanto,

$$\frac{b \cdot h}{2} \geq \frac{1}{2} \text{ cm}^2$$

Veja que realmente existem triângulos com área $1/2$. Basta considerar um quadradinho 1×1 do papel e dividi-lo ao meio por uma de suas diagonais.

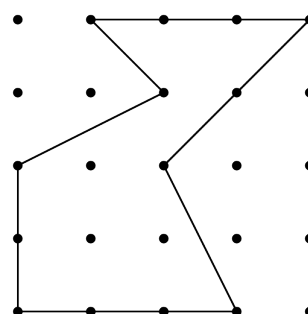
Veja que o argumento anterior mostra que a área de qualquer triângulo com lados paralelos aos lados da folha é da forma $n/2$, em que n é um número inteiro. Para terminar, precisamos considerar os triângulo ABC que não possuem lados paralelos aos da folha, como na figura a seguir.



Pelos seus vértices, trace retas paralelas aos lados das folhas. As interseções dessas retas são pontos dos reticulados, e, pelo argumento anterior, podemos garantir que as áreas das regiões I, II e III são números da forma $n/2$, com n inteiro. Como a área de um retângulo com lados paralelos aos lados do tabuleiro é um número inteiro, contabilizando a diferença das áreas dos demais triângulos, podemos concluir que a área do triângulo IV ou será um número inteiro ou metade de inteiro. Em qualquer caso, o seu valor mínimo é pelo menos $1/2$.

Observação: O Teorema de Pick permite calcular a área de qualquer polígono com vértices nos pontinhos da folha conhecendo o número de pontos interiores I e o número de pontos no bordo da figura, que será chamado de B , através da fórmula:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1.$$



Na figura anterior, $B = 13$ e $I = 3$, e assim a área do polígono é:

$$A = 3 + \frac{13}{2} - 1 = 8,5 \text{ cm}^2.$$

Problema 7. O número de todos os inteiros positivos de 64 dígitos sem zeros em sua representação e que são divisíveis por 101 é par ou ímpar?

Solução. Precisamos criar alguma maneira de agrupar os números em pares. Seja $A = \underbrace{11\dots110}_{64 \text{ vezes}}$

tições do número 1. Como 1111 é múltiplo de 101 é fácil ver que A é múltiplo de 101. Para todo número de 64 dígitos $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_{63} a_{64}}$, sem zeros em sua representação decimal, considere o seu conjugado $b = \overline{b_1 b_2 \dots b_{63} b_{64}} = (10 - a_1)(10 - a_2) \dots (10 - a_{64})$. Nenhum dígito de a é igual a zero, portanto, cada número $10 - a_i$ pertence ao conjunto $\{0, 1, \dots, 9\}$. Da equação $a + b = A$ obtemos que a é divisível por 101 se e somente se b é divisível por 101 (lembre-se que A é múltiplo de 101). Como o único número que é igual ao seu conjugado é o número $\underbrace{55\dots55}_{64 \text{ vezes}}$ (que é múltiplo de 101) e os demais números que satisfazem o enunciado podem ser pareados, concluímos que a quantidade procurada é ímpar.

Problema 8. É possível arranjar os números 1, 1, 2, 2, 3, 3, ..., 1986, 1986 em fila de modo que entre quaisquer dois i 's hajam $(i - 1)$ números?

Solução. Vamos tentar fazer alguns casos pequenos. É fácil ver que não conseguimos fazer o que o enunciado pede com os números 1, 1, 2, 2 mas com os números 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 temos um exemplo:

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
a_3	a_4	a_2	b_3	b_2	b_4	a_1	b_1
3	4	2	3	2	4	1	1

Contando da esquerda para a direita, denotemos por a_i e b_i as posições do primeiro e segundo número i , respectivamente. No nosso exemplo, $a_2 = 3$ e $b_2 = 5$. Como existem $i - 1$ números entre dois números i 's, devemos ter $b_i - a_i = i$. Se é possível escrever os números 1, 1, 2, 2, ..., n , n em linha como no enunciado, obtemos:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) &= \\ 1 + 2 + \dots + 2n &= n(2n + 1) \\ (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n) &= \\ 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Somando as duas linhas,

$$2(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = \frac{n(5n + 3)}{2}$$

Como o lado esquerdo é sempre par, a fração $\frac{n(5n + 3)}{2}$ deve ser um inteiro par. Isso já restringe os possíveis valores de n . Para $n = 1986$,

$$\frac{n(5n + 3)}{2} = 9863469$$

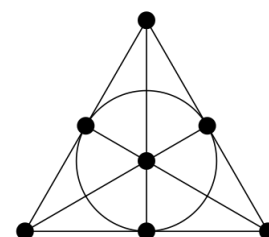
é ímpar e consequentemente não é possível dispormos esses números em linha. Uma pergunta natural que você deve tentar descobrir é, para quais n , tal distribuição é possível.

Problema 9. Os alunos da DMAT aprendem n matérias no semestre. É verdade que para cada matéria exatamente 3 alunos são os melhores nessa matéria, e que para cada 2 matérias, existe exatamente um aluno que é um dos melhores nas duas. Prove que:

- Se $n = 8$ existe um aluno que é um dos melhores em todas as matérias.
- Se $n = 7$, não é necessário que haja um aluno que é um dos melhores em todas as matérias.

Solução. a) Vamos inicialmente mostrar que algum aluno deve ser o melhor em 4 matérias. Suponha, por absurdo, que nenhum aluno é o melhor em 4 matérias. Seja M_1 uma matéria e $\{A, B, C\}$ os três alunos que são os melhores nessa matéria. Cada um deles pode estar em no máximo mais duas matérias e qualquer outra matéria deve ter um deles. Portanto, além de M_1 , podem existir no máximo $2 + 2 + 2 = 6$ matérias. Isso é um absurdo, pois temos mais que 7 matérias. Assim, existe algum aluno, que denotaremos por P , que é o melhor em 4 matérias. Sejam M_1, M_2, M_3 e M_4 quatro matérias em que ele é o melhor. Vamos mostrar que P é o melhor em todas as matérias. Suponha que A não é um dos melhores alunos para a matéria M . Assim, cada um dos 3 melhores alunos de M , devem estar nos 4 conjuntos disjuntos: $M_1 - \{P\}$, $M_2 - \{P\}$, $M_3 - \{P\}$ e $M_4 - \{P\}$. Isso é um absurdo. Logo, P é o melhor em todas as matérias.

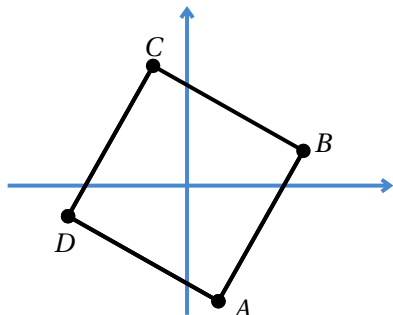
- Para $n = 7$, podemos produzir um exemplo usando o diagrama de Fano da figura a seguir. Cada ponto representa um aluno e cada reta assim como o círculo central representam as matérias. Note que cada matéria possa por 3 pontos, que serão os melhores nela, e que quaisquer duas matérias possuem exatamente um ponto em comum.



Novos Problemas

Problemas Universitários

Problema 10. No plano complexo (plano de Argand-Gauss) um quadrato ABCD tem centro no ponto $z = 0$.



Se o vértice A encontra-se no afixo do número complexo z_1 , determine o número complexo que representa o baricentro do triângulo ABC.

Problema 11. Qual o número de pares ordenados (a, b) de inteiros positivos a, b tais que as seguintes condições sejam simultaneamente satisfeitas?

- (i) $a \mid 6000$;
- (ii) $1 \leq b \leq \frac{6000}{a}$;
- (iii) $\text{mdc}(a, b, \frac{6000}{a}) = 1$.

Problema 12. Seja $r(x)$ o polinômio que é o resto na divisão de x^{2050} por $x^5 + x^2 + 1$. Quantos coeficientes ímpares possui $r(x)$?

Problema 13. Considere Γ o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja razão entre a distância de P à origem e a distância entre P e a reta $y = -1$ é constante e igual a $\frac{1}{2}$. Qual a maior distância entre dois pontos de Γ ?

Problema 14. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar e diferenciável satisfazendo:

- $f(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- $f'(0) = 1$.

Mostre que $f(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 15. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Prove que $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$ se, e somente se, existe uma matriz invertível $X \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AXB = O_n$, onde O_n é a matriz nula de ordem n .

Problemas de Matemática Elementar

Problema 16. Nas Olimpíadas de Pirajuba, existem 6 competidores e 8 dias de evento. Os três primeiros competidores de cada dia do evento recebem uma medalha, que pode ser de ouro, prata e bronze. Não existem empates e uma medalha de cada tipo é dada a apenas um atleta em cada dia do evento. Cada competidor recebe 5 pontos por cada medalha de ouro, 3 pontos por cada medalha de prata e 1 ponto por cada medalha de bronze. Se Luciana, que é uma das competidoras, conseguiu um total de 27 pontos no final do evento, qual o número máximo de medalhas de prata que ela pode ter recebido?

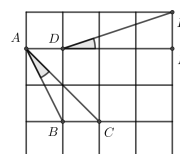
Problema 17. Um encontro de britânicos e italianos em uma cafeteria reuniu 55 pessoas. Cada uma dessas pessoas pediu café ou chá. Sabemos que os britânicos sempre contam a verdade quando bebem chá e mentem quando bebem café. Já os italianos se comportam de modo oposto. Um repórter realizou uma rápida pesquisa e descobriu os seguintes fatos:

- 1) 44 pessoas responderam “sim” para a pergunta: “Você está bebendo café?”
- 2) 33 pessoas responderam “sim” para a pergunta: “Você é italiano?”
- 3) 22 pessoas concordaram com a afirmação: “Está chovendo lá fora”.

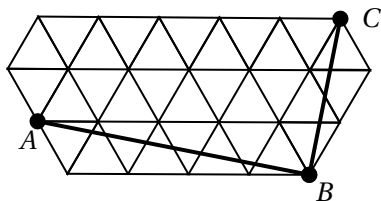
Quantos britânicos na cafeteria estavam tomando chá?

Problema 18. Érica viajou para um país estrangeiro e sacou \$800 da moeda local em um banco. O caixa deu essa quantia usando notas de \$20, \$50 e \$100, usando pelo menos uma nota de cada tipo. De quantas maneiras diferentes ele pode ter feito esse pagamento para ela?

Problema 19. Na malha a seguir, todos os quadradinhos possuem lados de mesma medida. Explique o porquê de os ângulos $\angle BAC$ e $\angle EDF$ possuírem a mesma medida.



Problema 20. Na figura a seguir, todos os triângulos são equiláteros e idênticos. Encontre a medida do ângulo $\angle ABC$.



Problema 21. Prove que

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{12}$$

Problema 22. Avalie a soma simplificando ao máximo sua expressão

$$\frac{2}{0! + 1! + 2!} + \frac{3}{1! + 2! + 3!} + \cdots + \frac{2024}{2022! + 2023! + 2024!}$$

(Página intencionalmente deixada em branco.)

CÓLOFON

Esta edição contou com a colaboração dos seguintes alunos:



Álisson Conceição Santos é egresso do IFBA, campus Salvador. Atualmente, é estudante de graduação em Matemática na UFBA, onde também é bolsista do PIBID. Além disso, Álisson atua como voluntário nas exposições do LEMA e integra o projeto de extensão Ondjango Asili.



Cleber Brito Figueiredo é estudante do bacharelado em física na Universidade Federal da Bahia (UFBA). Atualmente faz iniciação científica como bolsista da FAPESB em um projeto focado na teoria de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). Além disso, Cleber é apaixonado por jogos de tabuleiro e histórias de mistério.



Eldon Barros dos Reis Júnior é bacharel em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (UFBA) e atua como bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) na área de Probabilidade com o projeto “Método da Entropia Relativa e q -Entropia”.



João Vitor Fonseca iniciou sua trajetória acadêmica no curso de engenharia elétrica, com uma longa passagem na medicina e, por fim, na matemática, onde hoje cursa bacharelado. Realizou pesquisas na área de epidemiologia e patologia digital, quando foi bolsista do programa PIBIC. Além da matemática, tem grande interesse em música, entusiasta da improvisação.



José Valdomiro da Silva Neto é estudante do bacharelado em estatística na UFBA. Assistente de esportes na Associação Acadêmica Atlética Alan Turing e monitor voluntário nas exposições do LEMA, José está apenas começando sua jornada na universidade.



Taíse Lara de Souza Jorge é licenciada em Matemática pela UFBA e mestranda em Educação pela UFFS. Realiza pesquisa na área de Mediação Pedagógica e Alfabetização Matemática sob a perspectiva do Numeramento, amparada na Educação Crítica e Educação Matemática Crítica.



Yure Carneiro de Oliveira graduou-se e fez mestrado em matemática na UFBA, onde também realiza seu doutorado em matemática na área de Probabilidade. Após quase concluir um mestrado em estatística, ingressar em uma outra graduação e começar a estudar violino, agora está focado na conclusão do doutorado.



Link para o *site* da
Revista de Matemática Hipátia

