

Revista de Matemática



Hipátia

Volume 1, Número 1



Hipátia de Alexandria
c. 350/371 – 415 d.C.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Reitor: Paulo César Miguez de Oliveira

Pró-Reitoria de Extensão Universitária

Pró-Reitor: Guilherme Bertissolo

Instituto de Matemática e Estatística

Diretor: Kleyber Mota da Cunha

Departamento de Matemática

Chefe: Darllan Conceição Pinto

Revista de Matemática
Hipátia

Conselho Editorial

André Mandolesi

Cristina Lizana

Elaís Cidely

Henrique da Costa

Márcia Barbosa

Roberto Sant'Anna

Vinícius Mello

Equipe Técnica

Helena Beatriz Jesus Gomes

Eldon Barros dos Reis Júnior

Taíse Lara de Souza Jorge

Editor Responsável: Samuel Feitosa

Endereço para Correspondência

Instituto de Matemática e Estatística

Av. Milton Santos, s/n, Campus Universitário de Ondina CEP: 40.170-110

hipatia@ufba.br

ISSN 3085-6256



SINOPSE

EPÍSTOLA	
Bem-vinda, Hipátia!	1
HISTÓRIA	
Hipátia de Alexandria: uma cientista que precisamos conhecer	3
PARADOXO	
Teorema de Bayes e o Paradoxo da Ilha	8
TEOREMA	
O Lema de Sperner	15
DIÁLOGO	
<i>com</i> Eliza Maria Veras da Silva	25
TÉCNICA	
Números Complexos e Combinatória	29
SIMPÓSIO	
Eventos do DMAT	35
PROBLEMA	
Contando Paralelogramos	43

EPÍSTOLA

Bem-vinda, Hipátia!

A matemática Hipátia foi uma grande defensora do racionalismo científico, apaixonada pelo universo e pelas ciências exatas. Além de prolífica inventora e cientista, Hipátia foi reconhecida como uma professora educada, tolerante e muito dedicada. Sob sua inspiração, a Revista de Matemática Hipátia surge com o propósito de constituir um novo canal de divulgação matemática na comunidade de língua portuguesa. A revista é fruto da colaboração de diversos docentes e alunos do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Bahia e almeja satisfazer um leque amplo de interesses de amantes da matemática, além de fortalecer os vínculos da extensão universitária.

Neste primeiro número, apresentaremos artigos de matemática com temas variados para alimentar a curiosidade dos nossos leitores. Fizemos uma escolha cuidadosa de temas para que este primeiro número possa nortear as próximas edições. Todos os autores foram convidados para nos deleitar com artigos escritos numa linguagem acessível para todos os níveis e com uma apresentação gráfica atraente. A revista é feita para todos, desde estudantes da educação básica até matemáticos profissionais, passando por entusiastas amadores e curiosos das descobertas científicas.

Nossa logomarca e diagramação foram inspiradas em Hipátia e na cultura helênica que ela integrava. Os amantes do grego perceberão como a língua de Homero foi prestigiada nos títulos de nossas seções. Gostaríamos de agradecer especialmente a Amanda Braga e Pedro Bitencourt, alunos da Escola de Belas Artes, que tornaram realidade a nossa logo, plasmando o conceito da revista, e ao professor Vinícius Mello, que cuidadosamente escolheu os nomes das seções, diagramou e desenhou cada espaço na revista. Um dado curioso: a imagem na capa deste primeiro número foi gerada por inteligência artificial.

Neste primeiro volume, temos um artigo dedicado a nossa musa, Hipátia de Alexandria (**História**), e uma entrevista especial com a Professora Eliza Maria Ferreira Veras da Silva (**Diálogo**). Conheceremos um pouco da história de duas mulheres matemáticas que nos inspiram. Também contamos com a contribuição de artigos de temas diversos: Teorema de Bayes e o Paradoxo da Ilha (**Paradoxo**), O Lema de Sperner (**Teorema**) e Números Complexos e Combinatória (**Técnica**). Além desses interessantes artigos, temos duas seções informativas, **Simpósio** e **Problemas**, com o intuito de dar visibilidade aos eventos realizados pela comunidade do nosso departamento, através do registro de eventos e projetos realizados, e de propor problemas a nossos leitores,

pretendendo reforçar os laços de união da comunidade e incentivar o estudo da matemática. Finalmente, deixaremos ao longo do texto dicas culturais de livros, filmes, séries etc., tratando de temas relacionados à matemática.

Desde já, deixamos o convite aberto para que nossos leitores contribuam com artigos, soluções de problemas, curiosidades, teoremas preferidos e qualquer outro tema relevante para a matemática nas futuras edições.

Desejamos uma ótima leitura e que as próximas páginas possam fortalecer o seu amor pela Matemática!

Salvador, 7 de agosto de 2023

O Editor

HISTÓRIA

Hipátia de Alexandria: uma cientista que precisamos conhecer

Lindamir Salete Casagrande

Introdução

Em tempos não tão distantes, era difícil encontrar/conhecer mulheres cientistas, talvez pela dificuldade de termos acesso às suas produções ou porque, muitas vezes, a sociedade não classificasse as produções/descobertas feitas por elas como ciência, ou ainda devido ao fato de que a sociedade proibisse o acesso das mulheres aos espaços nos quais se produzia conhecimento, como as universidades [3]. Essa escassez de informações sobre as descobertas e invenções femininas dava a impressão de que mulheres não faziam ciência ou, pior ainda, que mulheres não tinham capacidade de produzir conhecimento. Este pensamento era e ainda é equivocado.

Ao longo da HISTÓRIA da humanidade, encontramos mulheres que dedicaram sua vida ao fazer científico. Quando os laboratórios estavam localizados nas residências dos cientistas, elas tinham acesso a eles e trabalhavam como parceiras ou assistentes dos homens que estavam autorizados a pesquisar, a produzir conhecimento e a publicá-lo. Não raras vezes, a pesquisadora era uma mulher, porém quem levava a fama era um homem da família. Neste período, as descobertas das mulheres eram publicadas em nome dos homens da família (marido, pai, irmão, filho) e a participação delas na descoberta era apagada, ocultada. Isso se dava porque a sociedade não permitia que as mulheres pesquisassem, escrevessem, estudassem. Cabe destacar que a sociedade não é um ente sobre-humano capaz de impor as determinações aos humanos. A sociedade é formada por homens e mulheres, em sua diversidade de cor, idade, crença

religiosa, orientação sexual, e as regras impostas por ela são definidas por estes humanos, ou melhor, pelos humanos que têm o poder de decidir. Ao longo da história, esse grupo foi composto majoritariamente, para não dizer exclusivamente, por homens, brancos e ricos. Assim, as regras sociais eram e ainda são definidas pelos homens.

Entretanto, mesmo enfrentando muitos obstáculos, muitas mulheres conseguiram inscrever seus nomes no mundo científico. Foi uma mulher a primeira cientista a conquistar duas vezes o prêmio Nobel em duas áreas do conhecimento diferentes (Marie Curie). Outra mulher foi a primeira programadora de um computador, um século antes do computador existir (Ada Lovelace). Também uma mulher fundou a primeira universidade. Fatima al-Fihri, nascida na Tunísia no ano 800, fundou, na cidade de Fez, em Marrocos, a universidade de al-Qarawyyin, a mais antiga ainda em funcionamento. Muitos outros inventos e descobertas que fazem parte de nosso cotidiano são invenções de mulheres [2].

Nos últimos anos tenho observado um movimento de resgate das histórias de mulheres que contribuíram sobremaneira para o desenvolvimento do conhecimento no mundo. As iniciativas com este fim consistem em *blogs*, perfis nas redes sociais, livros infantis, dentre outros. A revista Hipátia, que hora lança seu primeiro número, traz em seu título o nome de uma cientista que todos deveriam conhecer: Hipátia de Alexandria. Fui convidada a escrever este artigo pelo fato de ter escrito o livro infantojuvenil “Hipátia de Alexandria: a matemática, astrônoma e filósofa lendária”, publicado pela Editora Inverso em 2020. De



Retrato ficcional de Hipátia, por Jules Maurice Gaspard.

imediatamente aceitei o convite, pois é sempre um prazer falar/escrever sobre esta mulher incrível que viveu para produzir e disseminar conhecimento e que teve sua vida ceifada devido a isso. Optei por usar um tom coloquial neste texto, porém mantendo o rigor científico que um artigo acadêmico requer. Então vamos conhecer um pouco mais sobre a vida de Hipátia.

A infância de Hipátia

As informações sobre Hipátia são difíceis de localizar. Pouco se sabe sobre sua infância e muitas informações são imprecisas. Sabe-se que ela nasceu entre os anos 355 e 370 da era cristã em Alexandria, no Egito. Filha do filósofo e matemático Theon de Alexandria. O nome de sua mãe se perdeu no tempo. Talvez tenha sido uma cientista, uma entendida sobre plantas, raízes e rezas ou, quem sabe, uma dona de casa dedicada. Quem pariu Hipátia e o que fazia não sabemos, pois a história não preservou seu nome e também pouco sua memória.

Incentivada pelo pai, que também era sua principal fonte de inspiração, pôde estudar, e como estudou essa menina. Frequentou a Academia de Alexandria,

onde apaixonou-se pelo universo e se pôs a desvendar seus mistérios por meio da astronomia. A religião e seus encantos e dogmas também mereceram sua atenção (mal sabia que seriam religiosos e seus seguidores que poriam fim a sua vida). Estudou poesia e arte, talvez para entender o quão belo era o mundo a sua volta, ou para enxergar alguma beleza na sociedade contemporânea, ou, quem sabe, para melhor se inserir nas rodas de conversas da sociedade da época. Conhecimento em qualquer área e época é conhecimento e faz com que tenhamos vários pontos de mira sobre um mesmo problema. Desenvolveu ainda o dom da oratória e da retórica e isto lhe foi muito útil no futuro. As pessoas gostavam de ouvi-la falar, pois, além de seus discursos trazerem muito conhecimento, eram agradáveis de se ouvir. Mas foram as ciências exatas que a conquistaram profundamente, de modo especial, a matemática e a astronomia. Foi nestas áreas que ela ganhou notoriedade e se eternizou.

Com a mente centrada nos tempos atuais, somos levados a pensar sobre as brincadeiras de Hipátia. Do que será que ela brincava? Será que brincava? Tinha uma melhor amiga? Estas perguntas ficarão sem resposta, mas cada qual pode fazer as elocubrações que quiser. Difícil é imaginar ela brincando em um ambiente que não fosse rodeado por ciência, livros, talvez um laboratório.

Na adolescência teve o privilégio de estudar em Atenas, na Grécia, e lá frequentou a escola neoplatônica, escola essa cujas doutrinas seguiam os pensamentos espirituais e cosmológicos de Platão. Após concluir seus estudos, voltou para Alexandria, onde viveu o restante de sua breve vida (talvez para a época não foi tão breve assim!).

Na época em que Hipátia viveu não havia uma lei que proibía os estudos para as mulheres, entretanto poucas se embrenhavam pelo mundo do conhecimento. Talvez a falta de incentivo e de oportunidades as afastassem dos estudos. Ou, quem sabe, foi só a história, escrita predominantemente pelos homens, que não registrou o nome de outras mulheres cientistas. Isso não ocorreu com Hipátia, que tinha seu pai como grande incentivador, e sua existência nos mostra que, quando têm oportunidades, as mulheres constroem lindas histórias no mundo científico.

O casamento de Hipátia com a ciência

Sim, casamento. Quando questionada por que não se casava e tinha filhos ela respondia: “Sou casada com a ciência!”. Já naquela época tinha-se a percepção

que as mulheres tinham que se casar e procriar. As que não seguiam por este caminho causavam estranheza. Porém, parece que Hipátia não se preocupava com isso, afinal tinha coisas mais relevantes a fazer.

Quando esteve na Grécia, Hipátia se dedicou aos estudos matemáticos e filosóficos. Aparentemente, essas disciplinas são muito distantes, porém não o são. Ambas necessitam de capacidade de raciocínio elevada para enxergar além do que os fatos revelam de imediato. A filosofia é expressa pelas palavras e a matemática pelos números. Ela se destacou nos estudos filosóficos e foi considerada o maior nome da área, recebendo, inclusive, o apelido de “A Filósofa”. Em matemática, se debruçou de modo especial sobre a aritmética de Diofanto de Alexandria, que viveu no século 3 a.C. e é considerado o pai da álgebra. Ousada que era, pretendia unificar as ideias de Diofanto com os pensamentos neoplatônicos. Por lá também estudou medicina. Naquela época as ciências não eram tão compartimentadas como o são na atualidade, então era comum que os cientistas contemporâneos à Hipátia se dedicassem a várias áreas do conhecimento.

Ao retornar ao Egito, atuou como professora de matemática e filosofia na Academia de Alexandria. Pessoas vinham de todos os lugares para ouvir seus ensinamentos. Ela proferia palestras na ágora, uma espécie de praça, e os ouvintes ficavam embebedos em sua capacidade de compartilhar o seu conhecimento, tão profundas eram suas falas.

Junto a seu pai lançou comentários sobre a obra “Os Elementos”, de Euclides. Esta obra é composta por 13 volumes e trata sobre geometria, álgebra e aritmética. Estes estudos aprofundaram seu conhecimento matemático e ela se tornou referência para os matemáticos da época e se fez famosa por encontrar soluções para problemas que outros matemáticos não conseguiam resolver. Sempre que surgia um problema de difícil solução, recorriam a Hipátia que o resolvia.

Suas principais contribuições à matemática foram:

- Comentários sobre “A Aritmética”, de Diofanto. Suas notas e observações enriqueceram e popularizaram a obra e, por serem escritas em uma linguagem didática e acessível, puderam ser usadas por iniciantes nos estudos nessa área.
- Comentários sobre “Os Elementos”, de Euclides. Além de ampliar e popularizar o texto, também o atualizaram.
- Reinterpretou a obra “As Cônicas”, de Apolônio de Perga, tornando os conceitos ali expressos

acessíveis para quem se interessasse pelo tema.

Hipátia era muito criativa e se aventurou no campo das invenções. Em sua época não havia calculadoras e ela criou um método eficaz para fazer grandes divisões. Este método facilitava o trabalho de matemáticos e astrônomos. Ela tinha verdadeiro fascínio pelo firmamento e buscava formas de conhecê-lo cada vez melhor. Sua mente curiosa e criativa a levou a produzir diversos instrumentos, dentre eles, destaca-se a construção de um astrolábio, um hidrômetro e um higroscópio.

Aos 30 anos assumiu a direção da Academia de Alexandria. Neste período ela publicou muitos livros e tratados sobre álgebra e aritmética, porém as suas obras se perderam com a destruição da Biblioteca de Alexandria no século VII. Os livros da biblioteca foram queimados e todo o conhecimento que eles guardavam viraram cinzas. Este é um dos motivos pelos quais as informações sobre ela sejam tão imprecisas.

Hipátia teve muitos discípulos com os quais trocava correspondências sobre os estudos que estava realizando. Um dos principais discípulos foi Sinésio de Cirene, com quem mantinha uma assídua troca de correspondência. Ele registrou a singularidade do pensamento de Hipátia e, ao publicar a correspondência mantida com ela, fez com que sua contribuição para a história da humanidade chegasse até nós.

A morte de Hipátia

Como tudo na vida de Hipátia, a motivação para seu assassinato também tem mais de uma versão. Sua forma de tratar a todos os alunos, judeus, cristãos ou pagãos, com respeito, educação, tolerância e racionalidade despertou ciúmes e inimizades. Por ser pagã e defender o racionalismo científico, contestando, com base nele, o fator divino nos acontecimentos naturais e do cosmo, foi acusada de heresia e bruxaria [1]. Seu conhecimento foi considerado pecaminoso, perigoso e indesejado. O cristianismo encontrava-se em expansão e os cristãos da época não toleravam os que professavam outra fé (recentemente vivenciamos algo similar). Talvez por isso, merecesse e devesse morrer. Embora Alexandria fosse uma cidade na qual cristãos, judeus e pagãos convivessem cotidianamente, sendo um centro cultural que recebia pessoas oriundas de todas as partes do mundo, o poder estava em disputa entre autoridades religiosas e políticas. Hipátia estava inserida neste embrolho.

Devido ao seu conhecimento e eloquência, conquistou o cargo de conselheira de Orestes. Ele havia

sido seu aluno e ocupava o cargo de prefeito do Império Romano do Oriente (autoridade política). Orestes, que era um cristão moderado, nutria uma inimizade com o bispo da igreja de Alexandria, Cirilo (autoridade religiosa), que era um cristão radical. O bispo não tinha nenhuma tolerância com as pessoas que professavam fé divergente da cristã. Para ele, essas pessoas eram hereges. A divergência entre estes dois homens resultou no assassinato de Hipátia.

Uma das versões, e na minha opinião a menos provável, é que ela, uma mulher acusada de blasfêmia e de sentimentos anticristãos por ter se recusado a abandonar o paganismo, usava sua forte influência sobre Orestes, um cristão tolerante, para impedi-lo de se converter de vez ao “verdadeiro” cristianismo. Por isso foi morta. Cabe destacar que a blasfêmia que se referiam era conhecimento, sabedoria e independência.

Outra versão sobre a motivação para o seu assassinato brutal dá conta de que ela, “usando seus conhecimentos astronômicos, fundamentais para a definição da Semana Santa, havia chegado a uma data diferente da que havia sido anunciada pelo bispo Cirilo, autoridade máxima da igreja naquela época.” [1, p. 29] O bispo pediu que ela assumisse diante do povo que havia se equivocado, errado os cálculos da data. Porém, ela era a melhor matemática e astrônoma da época e sabia o que estava falando, sabia que estava certa, que o erro estava nas datas que o bispo apresentou e se recusou a atender à solicitação da autoridade religiosa. Contrariado, o bispo ordenou que Hipátia fosse punida exemplarmente, e assim foi feito.

A terceira versão sobre a motivação de sua morte cruel e trágica diz que Cirilo e seus seguidores estavam furiosos com o assassinato do monge cristão Amônio, que teria sido morto sob as ordens de Orestes. Então, para se vingar do prefeito, o bispo ordenou que Hipátia fosse assassinada. Cirilo tinha certeza de que isso abalaria as estruturas de Orestes, uma vez que Hipátia era sua principal conselheira. Assim, o bispo se sentiria vingado. Em suma, Hipátia pagou com a vida pela disputa entre dois homens.

Provavelmente a junção das três versões tenha sido o estopim para que em uma tarde de março de 415, mês da quaresma, quando Hipátia chegava a sua casa, retornando da Academia de Alexandria, onde trabalhava, fosse vítima de uma emboscada e arrancada de sua carruagem por uma horda de cristãos raivosos e afastados do verdadeiro ensinamento de Cristo. Eles a arrastaram pelas ruas até uma igreja onde a despiram. Não há precisão se ali ela foi espancada até a morte ou esfolada viva. Há relatos de

que seus algozes usaram pedaços de telha para deixar seu corpo em carne viva. Não satisfeitos com sua dolorosa morte, a esquartejaram e jogaram seu corpo em uma fogueira, simulando o sacrifício de um animal em ritos pagãos.

Não importa qual foi a motivação para a barbárie que foi o assassinato de Hipátia, todas levaram ao silenciamento de uma mulher que amava a ciência acima de tudo. O trágico fim da vida desta mulher incrível tinha que ser exemplar, para assegurar o poder ao bispo Cirilo e o foi.

O legado de Hipátia

Toda a produção de Hipátia foi perdida no incêndio e destruição da biblioteca de Alexandria, ocorrida no século VII. Entretanto os relatos e as correspondências que Hipátia trocava com seus alunos dão conta de que ela foi considerada a maior matemática e filósofa de Alexandria, e talvez do mundo em sua época. Os historiadores afirmam que, embora ela tenha se inspirado em seu pai, ela o suplantou em muito no que diz respeito às contribuições para o mundo científico.

Para a igreja, Hipátia e todas as mulheres que detinham conhecimento, eram livres, pensadoras, exerciam poder sobre o povo de suas comunidades, nos próximos mil anos, foram consideradas bruxas, caçadas e queimadas vivas. A “caça às bruxas” nada mais foi do que o assassinato de mulheres sábias e livres.

Para nós, mulheres cientistas, fica a certeza de que muitos obstáculos são impostos a nós pelo simples fato de sermos mulheres. Que homens não hesitam em atacar uma mulher sábia, mesmo que a disputa seja entre dois deles. O saber das mulheres incomodava desde os tempos de Hipátia e, ainda hoje, persiste incomodando. Porém, na atualidade, não conseguem nos matar e tampouco nos calar.

Hipátia existiu ou é uma lenda?

Há quem diga que Hipátia nunca existiu. Para esses, é difícil aceitar que em tempos tão remotos havia uma mulher inteligente, livre, com poder de oratória e que era respeitada pela maioria dos homens e mulheres de seu tempo. Mesmo os que a invejavam, a admiravam e por isso a invejavam. Eu considero pouco provável que a sociedade criou uma lenda em torno de uma mulher cientista em qualquer época, então Hipátia, esta mulher formidável, existiu e foi silenciada por uma horda de cristãos que desconheciam os preceitos do cristianismo.

FILME



O filme *Ágora* ou *Alexandria* retrata a história de Hipátia de Alexandria ao longo de um período de grandes conflitos religiosos, e evidencia as dificuldades enfrentadas por esta grande matemática em um momento onde as mulheres não tinham voz.

Embora o filme não apresente com grande profundidade e fidelidade a vida da Hipátia, ele consegue fornecer uma percepção do contexto e desafios vivenciados por ela.

Lançamento: 9 de outubro de 2009
Duração: 2h 21m

16

LIVRO



Na obra *Hipátia de Alexandria*, a autora, Lindamir Salete Casagrande, retrata com leveza e compromisso a história dessa grande matemática desde a sua infância, passando pelas suas contribuições e morte.

O livro possui ilustrações da Andréa Martau que tornam a leitura ainda mais atrativa.

Por fim, vale ressaltar que a obra é uma homenagem a todas as meninas, moças e mulheres que travaram e travam lutas diárias para conquistar o seu espaço na sociedade.

Publicação: Curitiba 2021, 2ªed, p. 40

12

PODCAST




O Podcast *História presente*, realizado em parceria com o Laboratório de Pesquisa e Práticas de Ensino em História da UERJ, apresenta no sétimo episódio do projeto *Mulheres no Mundo*, a matemática Hipátia de Alexandria, os narradores conseguem em poucos minutos discorrer quem foi a Hipátia, as suas contribuições e os desafios enfrentados para que viesse a se tornar a primeira mulher a realizar importantes produções junto a ciência.

Lançamento: Junho de
Duração: 5min e 26s



L

Sugestões culturais sobre Hipátia compiladas por Taíse Jorge.

Considerações Finais

O “efeito Matilda”, preconceito frequente em reconhecer a contribuição das mulheres à ciência, se manifesta na vida de quase todas as mulheres que decidem se dedicar à carreira científica. Na vida de Hipátia, entretanto, foi diferente. O reconhecimento de que ela era a mais brilhante cientista de sua época a levou à morte trágica. Sua história é, ao mesmo tempo, linda e triste. Há a necessidade de se resgatar e disseminar as contribuições de Hipátia para a ciência, para que sua trajetória e seu amor à ciência cheguem ao maior número de pessoas possível.

A criação desta revista com seu nome é uma forma de eternizar Hipátia de Alexandria e proporcionar que mais pessoas a conheçam. Vida longa à Revista Hipátia!

Bibliografia

- [1] Lindamir Salete Casagrande. *Hipátia: a matemática, astrônoma e filósofa lendária*. Inverso, Curitiba, 2020.
- [2] Tânia Gracieli Vega Incerti e Lindamir Salete Casagrande. Elas fizeram (e fazem) parte da história

da ciência e da tecnologia e são inventoras sim! *Cad. Gên. Tecnol., Curitiba*, 11:5–26, 37 2018.

- [3] Juliana et al. Schwartz. Mulheres na informática: quais foram as pioneiras? *Cadernos Pagu, Campinas*, 27:255–278, dez. 2006.



Lindamir Salete Casagrande é Pós-doutora em Estudos Interdisciplinares sobre Mulheres, Gênero e Feminismos pelo PPGNEIM/UFBA (2015); mestra (2005) e doutora (2011) em Tecnologia pelo PPGTE/UTFPR e graduada em Ciências com Habilitação em Matemática pela Fundação de Ensino Superior de Pato Branco (1990). Professora de matemática aposentada pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (de 1994-2017) e atua como professora voluntária no PPGTE. É escritora de biografias de mulheres para o público infantojuvenil. A série *Meninas, Moças e Mulheres* que inspiram, de sua autoria, conta com seis livros até o momento (maio de 2023). Mulher artesã também gosta de pintar, bordar e fazer tricô. Ama estar perto da natureza e, de modo especial, do mar. Gosta de ser chamada de “contadora de histórias”.

PARADOXO

Teorema de Bayes e o Paradoxo da Ilha

Tertuliano Franco e Diogo S. D. da Silva

Por PARADOXO, em Matemática, entende-se dois argumentos aparentemente corretos que são contraditórios. Neste artigo, veremos um paradoxo relacionado a probabilidade condicional, divertido e muito sutil, descrito por Ronald Meester em seu livro [2, Exemplo 1.5.6]. E corrigimos neste artigo uma falha na explicação apresentada pelo autor citado.

Probabilidade Condicional

Não entraremos em detalhes a respeito do que é um espaço de probabilidade. Há muitos livros para isso; veja [1], por exemplo. Mas não ter definições precisas não nos impede de seguir em frente e nos divertirmos... Matemática é uma atividade altamente não-linear!

Sejam A e B dois eventos de um espaço de probabilidade. Intuitivamente, A e B são dois conjuntos de resultados possíveis. Supondo que $\mathbb{P}(B) > 0$, definiremos a *probabilidade condicional de A dado B* por

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Em palavras, a probabilidade condicional de A dado B consiste na probabilidade de A acontecer, sabendo *a priori* que B aconteceu.

Por exemplo, considere o lançamento de um dado honesto, cujas faces contêm todos os números de 1 a 6. Logo, cada número possui uma chance de $1/6$ de ser sorteado. Se alguém vê o resultado mostrado e diz (de maneira confiável) que este resultado é um número par, qual a probabilidade deste ser o número 2? Não é mais $1/6$, e sim $1/3$, porque, dado que o resultado é par, há apenas as possibilidades 2, 4 e 6.

Visualmente, podemos pensar na probabilidade condicional como a restrição do espaço amostral ao conjunto B , veja a Figura 1.

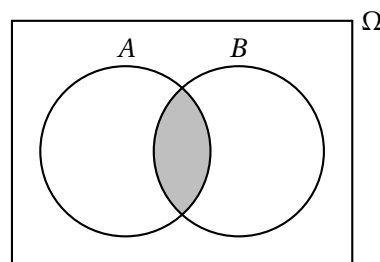


Figura 1: Intuitivamente, condicionar ao conjunto B significa restringir o espaço amostral Ω ao evento B .

Dizemos que dois eventos A e B são *independentes* se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

A probabilidade condicional nos permite motivar a definição acima: como se pode verificar, dois eventos A e B (para evitar chateação, suponha que ambos tenham probabilidades positivas) são independentes se, e somente se, ao condicionarmos na ocorrência de um deles, não alteramos a probabilidade do outro. Ou seja, se $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

Como exemplo, pense em dois lançamentos sucessivos de um dado. Se A é o evento *sair cara no primeiro lançamento* e B é o evento *sair cara no segundo lançamento*, podemos verificar que A e B são independentes.

Também podemos definir independência (coletiva) de não apenas dois eventos, mas de uma quantidade finita ou mesmo infinita. Uma coleção de eventos é

dita independente se, para qualquer subconjunto finito e não vazio de eventos dessa coleção, a probabilidade da interseção deles é igual ao produto das suas probabilidades.

A seguir, vejamos o Teorema de Bayes, que sob certas hipóteses, *grosso modo* permite:

1) escrever a probabilidade de um evento em termos de probabilidades condicionais deste evento com respeito a outros, e

2) reconstruir a probabilidade condicional de B dado A a partir da probabilidade condicional de A dado B .

Teorema (Teorema de Bayes). *Sejam $B_1, \dots, B_n$ eventos, todos de probabilidade positiva, que particionem o espaço Ω , ou seja, são disjuntos e sua união é igual a Ω . Dado um evento A , vale que*

$$(a) \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A|B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k).$$

(b) *Suponha que $\mathbb{P}(A) > 0$. Então, para qualquer índice $i = 1, \dots, n$,*

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A|B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)}.$$

Demonstração. Como $B_1, \dots, B_n$ particionam o espaço, temos que $\Omega = \cup_{k=1}^n B_k$. Portanto, $A = A \cap \Omega = \cup_{k=1}^n (A \cap B_k)$. Como os eventos B_k são disjuntos, os eventos $A \cap B_k$ também são. Pela aditividade da probabilidade, temos que $\mathbb{P}(A \cap \Omega) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_k)$, o que mostra o item (a) do enunciado. Para o item (b),

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(B_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A|B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)},$$

onde, na segunda igualdade, usamos o item (a) no denominador. $\square$

Observação: O Teorema de Bayes também vale no caso de enumeráveis eventos $B_1, B_2, \dots$, sendo a demonstração análoga.

O Assassinato

Considere uma ilha com $n + 2$ habitantes. Um deles é assassinado, restando portanto $n + 1$ habitantes, e sabe-se que o assassino é um dos habitantes do local. Assuma que a probabilidade de um habitante qualquer ser o assassino seja igual a $1/(n + 1)$.

Investigadores descobrem vestígios de sangue na cena do crime, não em quantidade suficiente para

descobrir quem é o assassino, mas o bastante para estabelecer um certo perfil. Tipo sanguíneo, por exemplo, mas não DNA, que permitiria descobrir com certeza o culpado.

Sabe-se que a probabilidade de cada ser humano ter este perfil sanguíneo é igual a p , com $0 < p < 1$, e seres humanos são independentes com relação a esta propriedade.

Além disso, como o assassino está entre os habitantes, sabemos também que pelo menos um deles terá o perfil do assassino (ao menos o próprio assassino!).

A polícia começa a investigar, um por um, *ao acaso*, os habitantes da ilha. O primeiro a ser investigado é a pessoa que chamaremos de Yplison, e verifica-se que Yplison tem o perfil encontrado na cena do crime. Condicionado a este evento, qual é a probabilidade de que esta pessoa Yplison seja o assassino? Em outras palavras, em quanto muda a probabilidade de Yplison ser o assassino dado este evento no qual verifica-se ter Yplison o perfil do assassino?

Em outras palavras, denotando por Y o evento *Yplison é o assassino*, e por S o evento *Yplison tem o perfil sanguíneo encontrado na cena do crime*, quanto é $\mathbb{P}(Y|S)$? Vejamos “soluções” para o problema.

A Primeira Solução

Uma probabilidade condicional $\mathbb{P}(\cdot|S)$ é uma probabilidade (fato da vida: o aceitaremos sem demonstração, ainda que não seja difícil prová-lo). Denote então $\mathbb{P}_S(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|S)$. Seja T_k o evento no qual k habitantes da ilha, dentre os n habitantes (excluindo-se Yplison) têm o perfil sanguíneo do assassino.

Usando a parte (a) do Teorema de Bayes, podemos deduzir que

$$\mathbb{P}_S(Y) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}_S(Y|T_k) \cdot \mathbb{P}_S(T_k).$$

Portanto, precisamos calcular $\mathbb{P}_S(Y|T_k)$ e $\mathbb{P}_S(T_k)$. Começamos pela segunda. Faremos o seguinte: denote por L a lista de $n + 1$ entradas, cada uma sendo zero ou um, indicando se o tipo sanguíneo de cada pessoa coincide com o tipo sanguíneo do assassino. Estas entradas são independentes, e cada uma possui probabilidade p de valer 1. Seja $E \in \{1, \dots, n + 1\}$ o número (aleatório) que representa a posição que Yplison ocupa nesta lista (usamos a letra E de *escolhido pela polícia*). Daí, temos que, para $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_S(T_k) &= \mathbb{P}\left[\sum_{j \neq E} L_j = k \mid L_E = 1\right] \\ &= \frac{\mathbb{P}\left[\sum_{j \neq E} L_j = k, L_E = 1\right]}{\mathbb{P}[L_E = 1]}, \end{aligned} \quad (1)$$

em que a vírgula dentro da probabilidade no denominador acima denota a interseção dos eventos. Calculemos separadamente as probabilidade no denominador e no numerador acima. Para isto, basta separar o evento em função do valor que E assume:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[L_E = 1] &= \mathbb{P}\left[L_E = 1, \bigcup_{k=1}^{n+1} [E = k]\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{k=1}^{n+1} ([L_E = 1] \cap [E = k])\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}([L_E = 1] \cap [E = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}([L_k = 1] \cap [E = k]) \\ &\stackrel{\text{indep.}}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}[L_k = 1] \cdot \mathbb{P}[E = k] \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} p \cdot \frac{1}{n+1} = p.\end{aligned}$$

Para encontrar a probabilidade que está no numerador de (1), fazemos um cálculo análogo separando o evento nos possíveis valores que E assume:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\sum_{j \neq E} L_j = k, L_E = 1\right] &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \mathbb{P}\left[\sum_{j \neq E} L_j = k, L_E = 1, E = \ell\right] \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \mathbb{P}\left[\sum_{j \neq \ell} L_j = k, L_\ell = 1, E = \ell\right] \\ &\stackrel{\text{indep.}}{=} \frac{p}{n+1} \sum_{\ell=1}^{n+1} \mathbb{P}\left[\sum_{j \neq \ell} L_j = k\right].\end{aligned}$$

É um exercício (ou faz parte de alguma aula) num curso básico de Combinatória provar que a soma de variáveis Bernoulli independentes com mesmo parâmetro é binomial. No nosso caso, isso corresponde a mostrar que $\mathbb{P}\left[\sum_{j \neq \ell} L_j = k\right] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Este é justamente o nosso caso, pois os L_j valem zero ou um (são Bernoulli) e são independentes. A probabilidade de uma determinada sequência com k uns e $n-k$ zeros é $p^k (1-p)^{n-k}$. Mas temos que contar quantas sequências têm k uns e $n-k$ zeros. Estas são $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, pois temos k repetições de uns e $n-k$ repetições de zeros (permutação com repetição, veja [1] por exemplo). Assim, deduzimos que $\mathbb{P}\left[\sum_{j \neq \ell} L_j = k\right] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ e, por conseguinte, que

$$\mathbb{P}\left[\sum_{j \neq E} L_j = k, L_E = 1\right] = p \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dividindo as duas probabilidades correspondentes ao numerador e denominador de (1), obtemos simplesmente

$$\mathbb{P}_S(T_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (2)$$

Calculemos agora a primeira probabilidade requerida. Condicionado a T_k , incluindo Yplison, temos $k+1$ pessoas com o perfil sanguíneo do assassino. Assim, Yplison terá a probabilidade de $1/(k+1)$ de ser o assassino. Ou seja,

$$\mathbb{P}_S(Y|T_k) = \frac{1}{k+1}.$$

Hum, a afirmação acima pode parecer um pouco forçada... para não deixar nenhuma sombra de dúvida, deixemos de preguiça e façamos as contas. Quem está na chuva é pra se molhar. Ou como diria Paulo Freire, ensinar é um ato de amor, logo um ato de coragem, não pode temer o debate. Denote por A o número aleatório em $\{1, \dots, n+1\}$ que corresponde ao assassino. Logo, o evento *Yplison é o assassino* é o evento $[E = A]$. Temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_S(Y|T_k) &= \mathbb{P}\left[E = A \mid \sum_{j \neq E} L_j = k, L_E = L_A = 1\right] \\ &= \frac{\mathbb{P}\left[E = A, \sum_{j \neq E} L_j = k, L_E = L_A = 1\right]}{\mathbb{P}\left[\sum_{j \neq E} L_j = k, L_E = L_A = 1\right]}. \quad (3)\end{aligned}$$

Calculemos as probabilidades no numerador e denominador acima, começando pelo numerador:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[E = A, \sum_{j \neq E} L_j = k, L_E = L_A = 1\right] &= \frac{p}{n+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

Para calcular o denominador, separamos nos eventos $[E = A]$ e $[E \neq A]$, como segue:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\sum_{j \neq E} L_j = k, L_E = L_A = 1\right] &= \mathbb{P}\left[E = A, \sum_{j \neq E} L_j = k, L_E = L_A = 1\right] \\ &\quad + \mathbb{P}\left[E \neq A, \sum_{j \neq E} L_j = k, L_E = L_A = 1\right] \\ &= \frac{p}{n+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &\quad + \frac{np^2}{n+1} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}.\end{aligned}$$

Fazendo o quociente entre numerador e denominador, inferimos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_S(Y|T_k) &= \frac{\frac{p}{n+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{\frac{p}{n+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \frac{np^2}{n+1} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}} \\ &= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k} + n \binom{n-1}{k-1}} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k} + k \binom{n}{k}} = \frac{1}{k+1},\end{aligned}$$

como esperávamos (ufa!). Agora que já temos $\mathbb{P}_S(T_k)$ e $\mathbb{P}_S(Y|T_k)$, podemos terminar a solução:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_S(Y) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}_S(Y|T_k) \cdot \mathbb{P}_S(T_k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{(n+1)-k} \\ &= \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}.\end{aligned}$$

A Segunda Solução

Vamos usar a parte (b) do Teorema de Bayes para uma segunda solução. Ou seja, vamos “inverter” a probabilidade condicional. Denote por Y^c o complementar de Y , ou seja, $Y^c = \Omega - Y$, que corresponde ao evento *Yplison não é o assassino*.

Note que Y e Y^c formam uma partição do espaço amostral. Além disso, $\mathbb{P}(S|Y) = 1$, pois se Yplison é o assassino, o evento no qual ele tem o perfil sanguíneo tem probabilidade um. Por outro lado, se Yplison não é o assassino, a probabilidade condicional de Yplison ter o mesmo perfil sanguíneo do assassino é igual a p . Logo, $\mathbb{P}(S|Y^c) = p$. Daí, aplicando o item (b) do Teorema de Bayes, temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y|S) &= \frac{\mathbb{P}(S|Y)\mathbb{P}(Y)}{\mathbb{P}(S|Y)\mathbb{P}(Y) + \mathbb{P}(S|Y^c)\mathbb{P}(Y^c)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{n+1}}{1 \cdot \frac{1}{n+1} + p \cdot (1 - \frac{1}{n+1})} \\ &= \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} + p \cdot (\frac{n}{n+1})} \\ &= \frac{1}{1 + pn}.\end{aligned}$$

Muito mais fácil, né? Mas esta resposta não bate com a primeira solução! Temos um paradoxo, pois as duas parecem corretas. Onde está a falha?

A Terceira Solução

Bem, como as respostas na primeira e segunda soluções não coincidem, pelo menos uma não pode estar correta. Mas qual seria? Antes de encontrar onde está o lapso, vejamos uma terceira solução, bastante simples e precisa, que nos indicará qual das duas soluções anteriores é a correta.

Considere, como antes, $E \in \{1, \dots, n+1\}$ a pessoa escolhida aleatoriamente pela polícia de maneira uniforme e $A \in \{1, \dots, n+1\}$ o assassino, que também é aleatório e uniforme, e $L \in \{0, 1\}^{n+1}$ a lista aleatória de zeros ou uns que determina o perfil sanguíneo de cada pessoa. Além disso, cada pessoa (ou seja, cada entrada de L) é independente e tem probabilidade p de ser igual a 1, e E , A e L são independentes. Então

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_S(Y) &= \mathbb{P}[E = A | L_A = L_E = 1] \\ &= \frac{\mathbb{P}[E = A, L_A = L_E = 1]}{\mathbb{P}[L_A = L_E = 1]}.\end{aligned}$$

O numerador acima é dado por

$$\mathbb{P}[E = A, L_A = L_E = 1] = \frac{p}{n+1}$$

e, para calcular o denominador, separamos nos eventos nos quais Yplison é o assassino ou não:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[L_A = L_E = 1] &= \mathbb{P}[L_A = L_E = 1, E = A] \\ &\quad + \mathbb{P}[L_A = L_E = 1, E \neq A] \\ &= \frac{p}{n+1} + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)p^2.\end{aligned}$$

Dividindo os valores obtidos, chegamos em

$$\mathbb{P}_S(Y) = \frac{\frac{p}{n+1}}{\frac{p}{n+1} + \frac{np^2}{n+1}} = \frac{1}{1 + pn},$$

que coincide com a segunda solução.

A Correção

Por incrível que pareça, o erro na primeira solução por assim dizer, é mais de interpretação do problema do que de matemática. Isto o torna mais sutil e difícil de ser corrigido. Todos os passos nos cálculos mostrados na primeira solução são válidos.

Como [2, página 26] aponta corretamente, a falha na primeira solução tem a ver com a fórmula (2) para

a probabilidade $\mathbb{P}_S(T_k)$. Contudo, comete um lapso em sua justificativa (que atire o primeiro livro aquele ou aquela que nunca errou uma demonstração). O autor diz que:

In method (1), we said that the probability that there are k other people with John Smiths' profile is given by (2). This seems obvious, but is, in fact, not correct. The fact that the first person to be checked has the particular DNA profile, says something about the total number of individuals with this profile.

Em tradução livre e adaptada:

Na primeira solução, dissemos que a probabilidade de que k pessoas, dentre aquelas excluindo-se Yplison, tenham o perfil sanguíneo é dado por (2). Isto parece óbvio, mas é, deveras, incorreto. O fato que a primeira pessoa verificada tem o perfil sanguíneo diz algo sobre o total de indivíduos com este perfil.

Ou seja, [2] argumenta que Yplison testar positivo altera a distribuição da amostra, em outras palavras, causa um viés, e que a fórmula (2) está errada por tal motivo. O seguinte argumento empírico parece fortalecer esta ideia:

Imagine que você tem em mãos um saco de balas, que podem ser de morango ou de menta, de maneira independente com parâmetro p . Se você enfia a mão no saco, e retira um punhado de balas, e todas as balas retiradas são de morango, então seria mais provável que as balas que restaram no saco sejam de morango, certo?

Na vida real, é razoável pensar neste caso que retirar um punhado de balas, todas, de morango, enviesa a amostra. Se são 100 balas no saco, e você tirou ao acaso 98 balas, todas de morango, vale a pena apostar que as duas últimas também são de morango. Tal situação é muito comum em Estatística¹, onde o objetivo seria encontrar (estimar) o parâmetro p , que não é conhecido. E se um punhado de balas causa um viés, uma única bala também causa. Podemos então transpor este argumento para o problema do assassino na ilha, onde esta única bala seria Yplison, que deu positivo.

Mas este não é o caso no problema do ilha, onde p é dado *a priori*! Se cada bala possui probabilidade

¹Em Estatística, o objetivo *grossa modo* é estimar a distribuição de probabilidade, que é desconhecida ou, ao menos, apenas parcialmente conhecida.

p e estas são independentes, retirar um punhado de balas, todas de morango, não afeta a distribuição das que restaram, que continuam sendo Bernoulli de parâmetro p . Bem, para $p = 1/2$, digamos, retirar um montão de balas, todas de morango, é bem improvável. Mas caso isso aconteça, isso não afetará a distribuição das balas restantes! Foi precisamente isso que demonstramos ao provar (2). Bem, mostramos no caso de uma bala, mas vale também para um punhado de balas. Em resumo, a nossa prova de (2) está correta sim.

Então, qual o problema? Há um viés, de fato, mas não devido a Yplison testar positivo. O viés decorre da existência do assassino, que não foi considerada. Imagine que Yplison, que testou positivo, não é o assassino. Então o assassino está entre as outras n pessoas, e isso sim causa um viés, porque o assassino tem o tipo sanguíneo encontrado na cena do crime.

Em outras palavras, a fórmula (2) foi deduzida corretamente, mas não representa o problema, porque condiciona apenas no evento em que Yplison testa positivo, e não considera a existência do assassino (que é positivo e que pode ou não ser Yplison). Eis a escondida, sutil falha de interpretação do enunciado na primeira solução. O evento em que condicionamos para encontrar $\mathbb{P}_S(T_k)$ deveria ser $[L_E = 1, L_A = 1]$ e não $[L_E = 1]$. Note que em (3) consideramos $[L_E = 1, L_A = 1]$ no condicionamento, o que levou corretamente a $\mathbb{P}_S(Y|T_k) = \frac{1}{k+1}$, bem como na terceira solução do problema que apresentamos.

A seguir, recalculemos $\mathbb{P}_S(T_k)$ para corrigir a primeira solução. Para $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_S(T_k) &= \mathbb{P}\left[\sum_{j \neq E} L_j = k \mid L_E = L_A = 1\right] \\ &= \frac{\mathbb{P}\left[\sum_{j \neq E} L_j = k, L_E = L_A = 1\right]}{\mathbb{P}[L_E = L_A = 1]}.\end{aligned}\quad (4)$$

O denominador em (4) é dado por

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[L_E = L_A = 1] &= \mathbb{P}[L_E = L_A = 1, E = A] \\ &\quad + \mathbb{P}[L_E = L_A = 1, E \neq A] \\ &= \frac{p}{n+1} + \frac{p^2 n}{n+1}\end{aligned}$$

e o numerador em (4) é dado por

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[\sum_{j \neq E} L_j = k, L_E = L_A = 1, E = A\right] \\ &+ \mathbb{P}\left[\sum_{j \neq E} L_j = k, L_E = L_A = 1, E \neq A\right] \\ &= \frac{p}{n+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

$$+ \frac{p^2 n}{n+1} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}.$$

Fazendo o quociente, obtemos

$$\mathbb{P}_S(T_k) = \frac{k+1}{1+pn} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

E, usando esta expressão, podemos corrigir a segunda solução:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_S(Y) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}_S(Y|T_k) \cdot \mathbb{P}_S(T_k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k+1}{1+pn} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{1}{1+pn}. \end{aligned}$$

O Problema das Crianças

Vejamos um problema de condicionamento famoso, o Problema das Crianças, e tracemos um paralelo com o problema anterior. Vejamos.

Para aquecer, analisemos a seguinte questão. *Uma família tem duas crianças. Qual a probabilidade de serem duas meninas?*

Embora não tenha sido dito, é comum supor implicitamente independência e uniformidade em problemas assim. Logo, temos $1/2 \times 1/2 = 1/4$ como resposta.

Continuando: *Uma família tem duas crianças. Dado que há pelo menos uma menina, qual a probabilidade (condicional) de serem duas meninas?*

Denote $\Omega = \{(a, a), (o, o), (a, o), (o, a)\}$ o espaço amostral, no qual a representa gênero feminino, o gênero masculino, a posição no par ordenado indica quem é mais velho, e assumamos que este espaço é equiprovável. Condicionar a saber que há pelo menos uma menina significa condicionar no evento $B = \{(a, a), (a, o), (o, a)\}$. Usando a definição de probabilidade condicional, temos que

$$\mathbb{P}(\{(a, a)\} | B) = \frac{1/4}{1/4 + 1/4 + 1/4} = 1/3.$$

Vejamos agora o problema das crianças com sua respectiva pseudo-solução: *Uma família tem duas crianças e sabe-se que há pelo menos uma menina². Você toca a campainha e uma menina abre a porta.*

²Mantivemos o enunciado original do problema por uma questão histórica. É importante ressaltar que questões de gênero são muito mais complexas e profundas do que simplesmente feminino/masculino. Veja a excelente referência [3] sobre o assunto, por exemplo.

Como já sabíamos que havia pelo menos uma menina, isto não traz nenhuma informação adicional. Assim, a probabilidade de que sejam duas meninas continua sendo 1/3.

Errado, a criança abrir a porta traz informação sim. É uma situação similar ao que fizemos na dedução de (2), condicionando na existência de uma pessoa positiva (que aqui corresponde a haver pelo menos uma menina). Inicialmente, cada pessoa era independente com probabilidade p . Aí condicionamos em haver uma pessoa positiva (e o total de pessoas deixa de ter distribuição binomial). Depois testamos uma pessoa, Yplison, que dá positivo (a criança abre a porta e é uma menina). E isto torna a distribuição dos demais novamente binomial com o parâmetro original p .

Vejamos o argumento dado por Meester neste caso, que é bastante simples e ilustrativo. Meester argumenta que o espaço amostral $\Omega = \{(a, a), (o, o), (a, o), (o, a)\}$ não é adequado, pois não caracteriza quem abriu a porta.

Como espaço amostral, precisamos aqui de algo como

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \{(a^*, a), (o^*, o), (a^*, o), (o^*, a) \\ &\quad (a, a^*), (o, o^*), (a, o^*), (o, a^*)\}, \end{aligned}$$

onde o asterisco indica quem abre a porta. Por exemplo, o evento $\{(o, a^*)\}$ representa a primeira criança ser um menino, e a segunda criança ser menina e ter aberto a porta. Considere este espaço amostral com uma probabilidade equiprovável. Assim, o problema acima corresponde a descobrir a probabilidade de $\{(a^*, a), (a, a^*)\}$ condicionado ao evento

$$\{(a^*, o), (o, a^*), (a^*, a), (a, a^*)\}$$

que é igual a 1/2, não a 1/3! Para encerrar, note que o Problema das Crianças não é o mesmo que o Problema da Ilha, pois não tem o viés da presença do assassino, que pode não ser Yplison.

Conclusão

Paradoxos são ferramentas pedagógicas poderosas. Nada como um paradoxo para testar (nossos próprios) conhecimentos e profundidade de compreensão. Como disse o físico Niels Bohr certa vez, “*Encontramos um paradoxo! Agora poderemos avançar!*”.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer a Milton Jara (IMPA) e a Renato dos Santos (UFMG) por discussões que con-

tribuíram muito e também ao estudante Henrique Caldas que reportou um pequeno lapso em [1], relacionado ao presente artigo.

Bibliografia

- [1] T. Franco. *Princípios de Combinatória e Probabilidade*. IMPA, Coleção Matemática Universitária, 1ª edição, 2020.
- [2] R. Meester. *A Natural Introduction to Probability Theory*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2ª edição, 2008.
- [3] Ann Oakley. Sexo e gênero. *Revista Feminismos*, 4(1), 2017. Tradução para a língua portuguesa do Capítulo 6 do livro “Sex and Gender” (1972), de Ann Oakley. Disponível online em <https://periodicos.ufba.br/index.php/feminismos/article/view/30206>.



Tertuliano Franco é bacharel em Física pela UFBA, e mestre e doutor em Matemática pelo IMPA (2011). É professor do Departamento de Matemática do IME-UFBA desde 2012, com passagens diversas em universidades no exterior. Faz pesquisa em Probabilidade, especialmente a respeito de limites de escala de sistemas de partículas interagentes e suas conexões com Equações Diferenciais Parciais e Mecânica Estatística. Já orientou diversos alunos e alunas de iniciação científica, mestrado, doutorado e pós-doutorado, e é autor de um livro para a graduação em Matemática, “Princípios de Combinatória e Probabilidade”, publicado pela Coleção Matemática Universitária (IMPA) em 2020. É apaixonado pelo que faz, e também toca um pouco de gaita de boca. Seus vizinhos até hoje não reclamaram do barulho de sua gaita, de onde ele deduz estar agradando bastante, e segue tocando.



Diogo S. Dórea da Silva é nascido e criado em Feira de Santana, e sofre pelo Fluminense de Feira desde tempos imemoriais. Coursou o bacharelado, mestrado e doutorado em Matemática pela UFBA, tendo sido orientado (ou desorientado, segundo o outro autor deste artigo) em todas as ocasiões pelo Professor Tertuliano Franco. Desde 2018, leciona no IFBA, Campus Valença. É um excelente professor e também exímio imitador de Ariano Suassuna (e de colegas também!).

TEOREMA

O Lema de Sperner

Vinícius Mello

Introdução

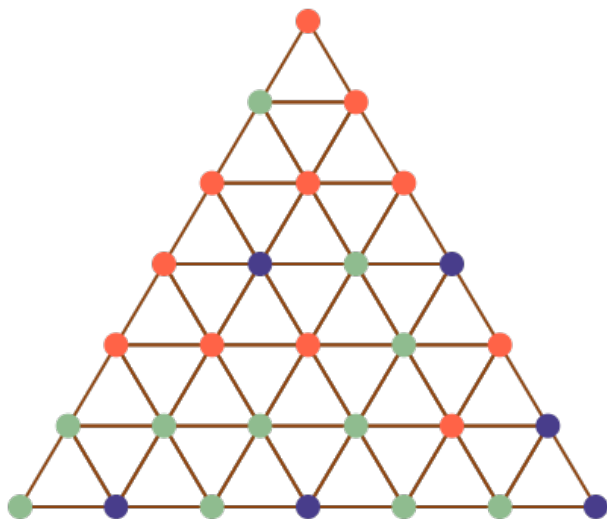


Figura 1: Uma triangulação propriamente colorida do triângulo Δ . Você consegue localizar todos os subtriângulos cujos vértices possuem as três cores?

Uma das intenções de termos uma seção chamada TEOREMA nesta revista é permitir que o autor fale de seu resultado matemático favorito de uma maneira mais informal e pessoal do que estamos acostumados. Portanto, pedindo licença para usar a primeira pessoa, mas prometendo não abusar dessa permissão, afirmo que meu teorema favorito é o “Lema de Sperner”.

Vamos começar com um exemplo. Suponha que um dado triângulo $\Delta = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ esteja *triangulado*, ou seja, subdividido em triângulos menores de modo que dois triângulos quaisquer ou são disjuntos, ou se

intersectam em um vértice ou aresta comum, como na figura 1. Agora vamos colorir os vértices v_0 , v_1 e v_2 com três cores distintas, digamos vermelho, verde e azul, e todos os demais vértices dos triângulos menores também com as mesmas cores, de maneira arbitrária, com a única condição que os vértices interiores de uma aresta de $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ não podem ter a mesma cor do vértice oposto a ela (por exemplo, os vértices sobre a aresta $\langle v_0, v_1 \rangle$ podem ter a cor de v_0 ou de v_1 , mas não a cor de v_2). O Lema de Sperner afirma que, sob essas condições, *ao menos um dos triângulos menores tem seus vértices coloridos com as três cores distintas*. Destacamos na figura 2 todos os triângulos *completos* da figura 1, ou seja, aqueles cujos vértices estão coloridos com todas as três cores.

Meu objetivo neste artigo é contar um pouco da história deste lema de aparência tão singela, explicar por que ele é meu teorema favorito, demonstrá-lo, de mais de uma maneira, e, já que trata-se de um lema, usá-lo para esboçar a demonstração de um famoso teorema.

História

Entre 1910 e 1912, o célebre matemático holandês L.E.J. Brouwer publicou uma sequência de resultados que respondiam várias perguntas da parte da Matemática que então ainda era chamada de “Analysis Situs” (graças aos trabalhos de H. Poincaré publicados entre 1899 e 1904), mas que depois viria a se chamar Topologia. Um desses resultados é o

Teorema (da Invariância da Dimensão). *Se $\mathbb{R}^m$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, então $m = n$.*

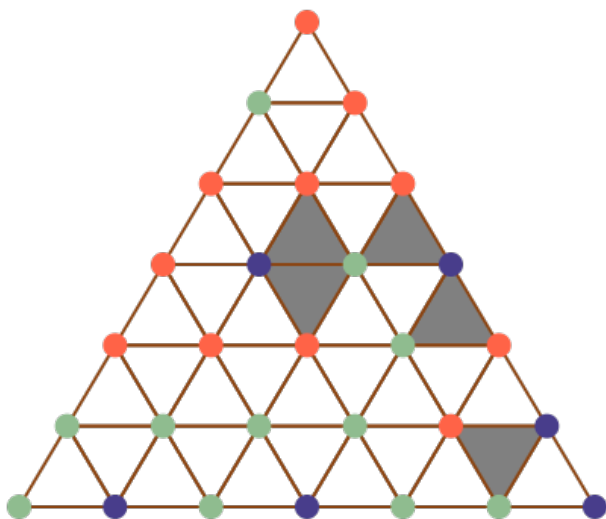


Figura 2: Triangulação de Δ com todos os 5 subtriângulos completos destacados.

A demonstração desse teorema afastou de vez as preocupações geradas por certos objetos “patológicos”, tais como a curva de Peano, uma curva contínua (um objeto unidimensional) que passa por todos os pontos de um quadrado (um objeto bidimensional). O Teorema da Invariância da Dimensão mostra que não pode haver uma correspondência entre pontos de um intervalo da reta e pontos de um quadrado, por exemplo, que seja ao mesmo tempo bijetiva, contínua e com inversa contínua.

Segundo J. Dieudonné [7, p. 161],

...[Brouwer] usou sua descoberta [as aproximações simpliciais] para definir rigorosamente a noção de *grau* de uma aplicação contínua, e então prosseguiu, através das construções mais fantasticamente complicadas, baseando-se *exclusivamente* nesta noção, até provar os celebrados “Teoremas de Brouwer”.

Nos anos seguintes, as técnicas de Brouwer foram assimiladas até que, em 1928, Emanuel Sperner, um jovem de 23 anos de idade, provou o Teorema da Invariância da Dimensão usando o lema que leva seu nome [23], ou seja, com técnicas elementares, se comparadas às empregadas por Brouwer.

Vamos introduzir algumas definições para poder enunciar o Lema de Sperner¹ de maneira mais precisa. O *operador de face* ∂_i aplicado a um triângulo $\Delta = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ obtém a aresta oposta ao i -ésimo vértice. Por exemplo, $\partial_0\Delta = \langle v_1, v_2 \rangle$, $\partial_1\Delta = \langle v_0, v_2 \rangle$ e

¹Existe uma outra proposição também devida a Sperner, a qual descreve as maiores famílias possíveis de conjuntos finitos, nenhum dos quais contém quaisquer outros conjuntos na família, que por vezes também é chamada “Lema de Sperner”.

$\partial_2\Delta = \langle v_0, v_1 \rangle$. Seja T uma triangulação do triângulo Δ . Suponha que para cada vértice v de T associemos um *rótulo* $L(v)$ no conjunto $\{0, 1, 2\}$ (podemos usar cores nas figuras para representar esses rótulos). Dizemos que uma função de rotulação L é *própria* se

$$v \in \partial_i\Delta \Rightarrow L(v) \neq i,$$

ou seja, os vértices em uma aresta de Δ não podem ter o mesmo rótulo do vértice oposto à aresta. Um triângulo $\tau = \langle v_i, v_j, v_k \rangle \in T$ é *completo* com relação à função de rotulação L se

$$\{L(v_i), L(v_j), L(v_k)\} = \{0, 1, 2\},$$

ou seja, os vértices de τ possuem todos os rótulos. A versão bidimensional do Lema de Sperner que apresentamos na introdução fica assim:

Lema (de Sperner, $n=2$). *Qualquer rotulação própria de uma triangulação de um triângulo possui ao menos um triângulo completo.*

Para o caso $n = 3$, teríamos uma triangulação T de um tetraedro Δ , ou seja, uma decomposição de Δ em uma coleção de tetraedros menores que ou são disjuntos ou se intersectam em um vértice, aresta ou face comum a ambos. O operador de face funcionaria de maneira análoga, por exemplo, dado o tetraedro $\Delta = \langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$, $\partial_2\Delta$ é a face $\langle v_0, v_1, v_3 \rangle$, e a função de rotulação associaria a cada vértice da triangulação um número no conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$.

Sperner formulou seu teorema no caso geral utilizando a noção de *simplexo* n -dimensional ou (n -simplexo). Um 0-simplexo é um ponto, 1-simplexo é um segmento de reta, um 2-simplexo é um triângulo, um 3-simplexo é um tetraedro e assim por diante. Além disso, se observarmos a figura 2, vemos que não há apenas um triângulo completo, mas um número *ímpar* deles. Fazendo as devidas adaptações, chegamos assim à redação final do Lema:

Lema (de Sperner, caso geral). *Qualquer rotulação própria de uma triangulação de um n -simplexo possui um número ímpar de n -simplexos completos.*

Recomendo a referência [17] para quem tiver interesse em entender melhor o enunciado geral do Lema de Sperner em termos de simplexos, mas aqui vamos nos limitar ao caso bidimensional, que é suficiente para entender o caso geral.

Um ano após a publicação do Lema de Sperner, Knaster, Kuratowski e Mazurkiewicz o aplicaram para provar outro famoso teorema de Brouwer, o

Teorema (do Ponto Fixo de Brouwer). *Uma aplicação contínua $f : B^n \rightarrow B^n$ da bola n -dimensional em si mesma possui ao menos um ponto fixo, ou seja, existe um $p \in B^n$ tal que $f(p) = p$.*

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer possui por si só inúmeras aplicações [20], mas mesmo assim o Lema de Sperner já foi usado para demonstrar, diretamente ou com ligeiras adaptações, vários outros teoremas importantes da Matemática, tais como o Teorema de Perron-Frobenius [9], o Teorema Fundamental da Álgebra [15] e o Teorema da Bola Cabeluda [14], além de ter encontrado aplicações interessantes na Teoria dos Jogos e na Economia [24]. O ciclo se fechou quando Yoseloff mostrou em 1974 que o Lema de Sperner pode ser demonstrado por meio do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer [25], estabelecendo-se assim uma interessante equivalência entre eles.

Devido a seu caráter elementar e pictórico e as suas variadas aplicações, o Lema de Sperner é muito popular em vídeos de divulgação matemática ([8, 21, 2], por exemplo) e em trabalhos de conclusão de curso e dissertações de mestrado. Por exemplo, localizei duas dissertações de PROFMAT sobre o tema [6, 5], a segunda delas orientada pelo prof. Joseph Yartey, nosso colega de departamento.

Minha história Meu primeiro contato com o Lema de Sperner foi através do livro “A Combinatorial Introduction to Topology”, de Michael Henle [10], ainda no começo do meu doutorado em Computação Gráfica, ou mais exatamente em Modelagem Geométrica, que é o ramo da Computação Gráfica que estuda métodos e algoritmos para a representação de formas, tais como curvas e superfícies. O objeto mais básico da Modelagem Geométrica são as *malhas de triângulos*, que são na verdade *complexos simpliciais*, como viria a aprender, e o livro de Henle contém tudo que eu precisava saber sobre o básico de topologia combinatória. Lembro de ter ficado particularmente impressionado com sua demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer através do Lema de Sperner.

A minha tese de doutorado [19] acabou sendo sobre subdivisão e deformação de malhas de triângulos (e de *pseudovarietades combinatórias*, em geral) e na parte de deformação eu tive a oportunidade de aplicar o Lema de Sperner para demonstrar uma certa propriedade (essencialmente a sobrejetividade da deformação), o que me deixou muito feliz.

Dei uma palestra sobre o Lema de Sperner no MAT-FEST da Universidade Federal de Alagoas em 2007 e confesso ter ficado um pouco apreensivo, pois o prof. Nicolau Saldanha, primeiro brasileiro a ganhar uma

medalha de ouro na Olimpíada Internacional de Matemática e grande topologista, estava na audiência, assistindo a tudo impassível. Lá pelas tantas, eu estava jogando, contra o computador, o “Jogo de Sperner”, no qual os jogadores colocam fichas coloridas alternadamente num tabuleiro triangular e de acordo com as regras do Lema de Sperner, de modo que o perdedor é aquele que formar o primeiro triângulo completo. Jogando é forma de dizer, pois eu estava apenas clicando meio aleatoriamente nas casas, de tão nervoso. Até que em dado momento eu passei a clicar e clicar, sem que nada acontecesse. Depois de alguns longos e desconfortáveis segundos de silêncio, eu constatei que havia vencido o jogo e gritei, levantando os braços: “Ganhei!”, arrancando risadas da plateia, inclusive do prof. Nicolau, o que serviu para “quebrar o gelo”.

Demonstração

Vamos agora à demonstração mais simples do Lema. Trata-se de uma aplicação do *princípio da contagem dupla*, no qual contamos uma mesma quantidade de duas maneiras diferentes para chegar a um resultado.

Vamos considerar inicialmente a versão unidimensional do Lema de Sperner. Nela temos um segmento S subdividido e com os vértices coloridos com duas cores, sendo que os vértices extremos de S possuem cores diferentes, como neste exemplo:



Queremos contar o número de subsegmentos que possuem vértices de cores distintas, quantidade que denotaremos por $\# \text{---} \text{---}$ (no caso acima, $\# \text{---} \text{---} = 5$). Para tanto, vamos contar uma outra quantidade (e aqui está o “truque” de Sperner). Seja $F(\sigma)$ o número de vértices verdes do subsegmento σ . Claramente,

$$F(\text{---}) = 2$$

$$F(\text{---}) = 1$$

$$F(\text{---}) = 1$$

$$F(\text{---}) = 0.$$

Vamos contar

$$\sum_{\sigma \in S} F(\sigma),$$

ou seja, o número de vértices verdes contados por subsegmento, de duas maneiras. Por um lado, como subsegmentos da forma --- não contribuem para o total, temos que

$$\sum_{\sigma \in S} F(\sigma) = \# \text{---} + 2 \times \# \text{---}, \quad (1)$$

onde $\# \text{---}$ denota o número de subsegmentos com os dois vértices verdes. Por outro lado, percebemos que cada vértice verde interior é contado duas vezes em $\sum_{\sigma \in S} F(\sigma)$, já que é incidente a exatamente dois subsegmentos, ao passo que o vértice verde na fronteira de S é contado uma única vez, assim

$$\sum_{\sigma \in S} F(\sigma) = \#(\text{ na fronteira}) + 2 \times \#(\text{ no interior}). \quad (2)$$

Igualando as equações (1) e (2) e considerando a congruência módulo 2, temos que

$$\# \text{---} \equiv 1 \pmod{2}, \quad (3)$$

donde concluímos que $\# \text{---}$ é ímpar.

O caso bidimensional é bem parecido. Queremos contar



ou seja o número de triângulos completos. No caso da figura 2, temos que

$$\# \text{---} = 5.$$

Seja $F(\tau)$ o número de segmentos do tipo --- no subtriângulo τ . Claramente,

$$\begin{aligned} F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) &= 2 \\ F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) &= 2 \\ F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) &= 1. \end{aligned}$$

e $F(\tau) = 0$ nos demais casos. Assim,

$$\sum_{\tau \in T} F(\tau) = \# \text{---} + 2 \times \# \text{---} + 2 \times \# \text{---} \quad (4)$$

Por outro lado, percebemos que as arestas do tipo --- no interior de T são incidentes a exatamente dois subtriângulos, enquanto as arestas do tipo --- na fronteira de T são incidentes a exatamente um subtriângulo, donde

$$\sum_{\tau \in T} F(\tau) = \#(\text{ na fronteira}) + 2 \times \#(\text{ no interior}). \quad (5)$$

Comparando as equações (4) e (5) e tomando-as módulo 2, temos que

$$\# \text{---} \equiv \#(\text{ na fronteira}) \pmod{2}.$$

Mas pelo caso unidimensional, ou seja, pela equação 3, concluímos que

$$\# \text{---} \equiv 1 \pmod{2},$$

que é exatamente a tese do Lema de Sperner, o número de triângulos completos é ímpar. Observamos também o padrão indutivo que pode ser usado para demonstrar o Lema para qualquer dimensão n .

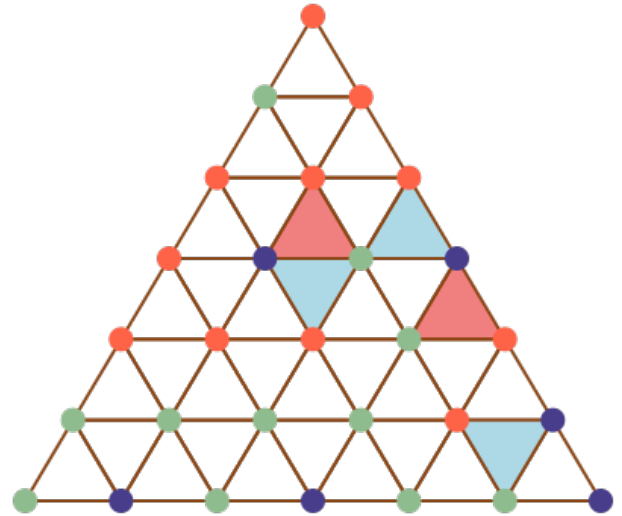


Figura 3: Triangulação de Δ com todos os 5 subtriângulos completos destacados de acordo com a orientação: se ao percorrer os vértices no sentido anti-horário (resp. horário) encontramos as cores vermelho, verde e azul, nesta ordem, dizemos que o subtriângulo tem orientação positiva (resp. negativa).

Orientação É possível refinar o resultado do Lema de Sperner usando a noção de *orientação* (como estabelecido em [3]). Na figura 3, destacamos em azul claro os triângulos completos nos quais as cores vermelho, verde e azul aparecem nesta ordem no sentido *anti-horário* e em vermelho claro os triângulos completos nos quais as cores vermelho, verde e azul aparecem nesta ordem no sentido *horário*. Podemos observar que o número de triângulos rotulados *com orientação positiva* (os azuis) é uma unidade a mais que os *com orientação negativa* (os vermelhos) (e portanto o total de triângulos completos é ímpar).

A demonstração desse fato é bem semelhante à que fizemos acima. Vamos começar com o caso unidimensional. Vamos definir $G(\sigma)$ para um subsegmento

σ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G(\text{---}\bullet\text{---}\bullet) &= 1 + (-1) = 0 \\ G(\text{---}\bullet\text{---}\bullet) &= 1 \\ G(\bullet\text{---}\text{---}\bullet) &= -1 \\ G(\bullet\text{---}\bullet\text{---}) &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, $G(\sigma)$ conta o total de vértices verdes em σ de acordo com sua posição: um vértice à esquerda conta 1 e à direita, -1 . Assim,

$$\sum_{\sigma \in S} G(\sigma) = \# \text{---}\bullet\text{---}\bullet - \# \bullet\text{---}\text{---}\bullet, \quad (6)$$

já que os segmentos $\text{---}\bullet\text{---}\bullet$ e $\bullet\text{---}\bullet\text{---}$ não contribuem para o total. Note que estamos distinguindo agora os tipos de segmentos completos $\text{---}\bullet\text{---}\bullet$ e $\bullet\text{---}\text{---}\bullet$. Por outro lado, cada vértice verde interior contribui em $\sum_{\sigma \in S} G(\sigma)$ com $+1$ para o segmento a sua direita e com -1 para o segmento a sua esquerda, enquanto o vértice verde da fronteira de S contribui com 1, de modo que

$$\sum_{\sigma \in S} G(\sigma) = 1 + 0 \times \#(\bullet \text{ no interior}). \quad (7)$$

Igualando as equações (6) e (7), concluímos que

$$\# \text{---}\bullet\text{---}\bullet - \# \bullet\text{---}\text{---}\bullet = 1. \quad (8)$$

Vamos agora ao caso bidimensional. Seja $G(\tau)$ quantas vezes o segmento $\text{---}\bullet\text{---}\bullet$ aparece na fronteira do triângulo τ , no sentido anti-horário, contando a orientação, ou seja,

$$\begin{aligned} G(\text{---}\bullet\text{---}\bullet) &= 1 \\ G(\bullet\text{---}\text{---}\bullet) &= -1 \\ G(\text{---}\bullet\text{---}\bullet) &= 1 + (-1) = 0 \\ G(\bullet\text{---}\text{---}\bullet) &= (-1) + 1 = 0 \end{aligned}$$

etc. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in T} G(\tau) &= \# \text{---}\bullet\text{---}\bullet - \# \bullet\text{---}\text{---}\bullet \\ &\quad + 0 \times \# \text{---}\bullet\text{---}\bullet + 0 \times \# \bullet\text{---}\text{---}\bullet \end{aligned} \quad (9)$$

Por outro lado, cada subsegmento $\text{---}\bullet\text{---}\bullet$ no interior de T contribui com sinais opostos para seus subtriângulos incidentes, donde

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in T} G(\tau) &= \#(\text{---}\bullet\text{---}\bullet \text{ na fronteira}) \\ &\quad - \#(\bullet\text{---}\text{---}\bullet \text{ na fronteira}) \\ &\quad + 0 \times \#(\text{---}\bullet\text{---}\bullet \text{ no interior}). \end{aligned} \quad (10)$$

Igualando as equações (9) e (10), vemos que

$$\begin{aligned} \# \text{---}\bullet\text{---}\bullet - \# \bullet\text{---}\text{---}\bullet &= \#(\text{---}\bullet\text{---}\bullet \text{ na fronteira}) \\ &\quad - \#(\bullet\text{---}\text{---}\bullet \text{ na fronteira}) \\ &= 1, \end{aligned}$$

pela equação (8). O padrão indutivo está claro e podemos enunciar outra versão do Lema de Sperner:

Lema (de Sperner, caso orientado). *Em qualquer rotulação própria de uma triangulação de um n -simplexo, o número de n -simplexos completos com orientação positiva excede em uma unidade o número de n -simplexos completos com orientação negativa.*

Outras Demonstrações

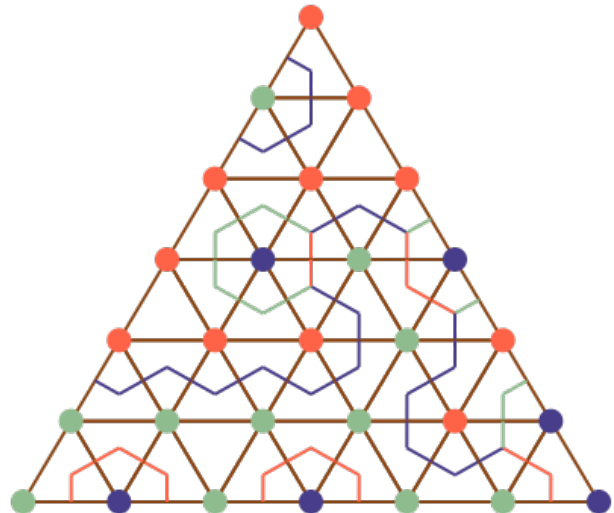


Figura 4: Podemos também usar cores para colorir certas arestas do grafo de adjacência da triangulação e assim observar certos padrões.

Várias outras demonstrações do Lema de Sperner são conhecidas. Vamos comentar algumas delas.

Uma demonstração bastante intuitiva envolve um certo grafo construído a partir da triangulação. Vamos pensar nos subsegmentos do tipo $\text{---}\bullet\text{---}\bullet$ como portas que dão acesso a quartos, que são os subtriângulos de T que possuem ao menos uma porta. Obviamente os quartos possuem ou duas portas (como $\text{---}\bullet\text{---}\bullet$ e $\bullet\text{---}\text{---}\bullet$), ou uma única porta (como $\text{---}\bullet\text{---}\bullet$), os quais são certamente triângulos completos. Contemple a figura 4 por um momento e veja os segmentos azuis que atravessam as portas e que representam os caminhos possíveis pelos quartos. Se entrarmos por uma das portas da fronteira, ou acabaremos voltando para o exterior do triângulo, ou chegaremos

em um quarto com uma única porta (que é um triângulo completo). Mas existe um número ímpar de portas na fronteira, como já vimos, portanto certamente algum desses caminhos nos levará a um quarto sem portas e assim encontramos um triângulo completo! Por outro lado, se entrássemos em um dos quartos com uma única porta (talvez pelo telhado) e seguíssimos as portas, ou chegaríamos a uma das portas da fronteira, que são em número ímpar, ou a outro quarto com uma única porta. Assim, temos necessariamente um número ímpar de triângulos completos. Uma demonstração completa usando esse argumento pode ser vista em [4].

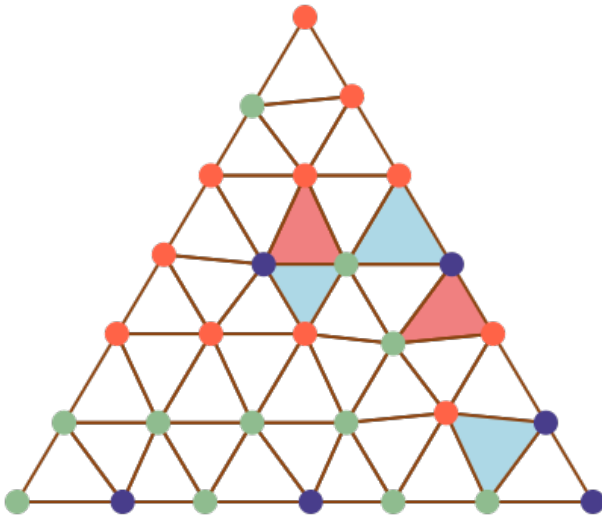


Figura 5: Instante $t = 0.02$ da animação do movimento dos vértices da triangulação em direção aos vértices de mesma cor nos cantos de Δ .

Um belo argumento “animado” envolvendo área foi descoberto recentemente [18]. A ideia é mover simultaneamente todos os vértices v_i da triangulação T para os vértices de mesma cor que estão nos cantos do triângulo maior (os vértices v_0 , v_1 e v_2), ao longo de segmentos de reta. Ou seja, consideramos as triangulações $T(t)$ que possuem as mesmas relações de incidência que T mas cujos vértices são da forma

$$v_i(t) = (1 - t)v_i + tv_{L(v_i)},$$

com t variando continuamente no intervalo $[0, 1]$. Quando $t = 0$, temos a triangulação original da figura 3. Para $t = 0.02$ e $t = 0.06$ temos as triangulações das figuras 5 e 6, respectivamente. Note como os vértices vão sendo “atraídos” para os vértices do triângulo maior de mesma cor. Seja agora $A(t)$ a soma das áreas (com sinal) de todos os subtriângulos de $T(t)$, onde estamos supondo que os subtriângulos de $T(0) = T$ estejam orientados positivamente e que

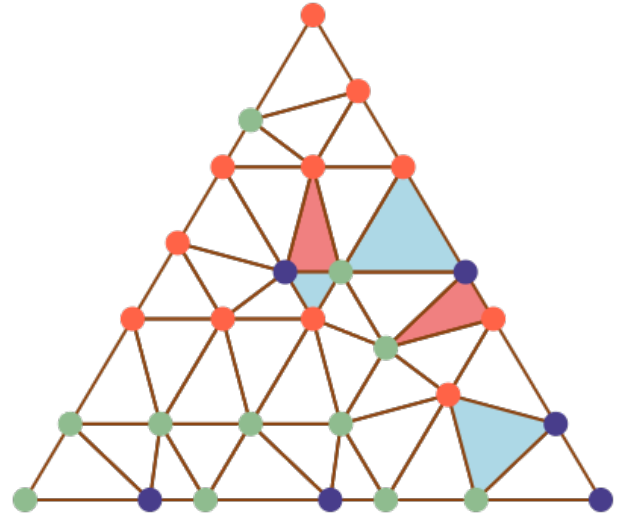


Figura 6: Instante $t = 0.06$ da animação do movimento dos vértices da triangulação em direção aos vértices de mesma cor nos cantos de Δ .

$A(0) = 1$. Lembro que a área com sinal de um triângulo $\langle A, B, C \rangle$ é dada pelo determinante

$$\text{Area}\langle A, B, C \rangle = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \end{vmatrix}.$$

Como a triangulação é própria, os vértices sobre as arestas “deslizam” sobre elas e os vértices internos permanecem contidos no triângulo durante o movimento, de modo que $T(t)$ é sempre uma triangulação do mesmo triângulo inicial. Também é intuitivo que a área $A(t)$ é sempre unitária, pelo menos para t em um intervalo $[0, t_0]$, com $t_0 > 0$ suficientemente pequeno, pois os vértices não têm “tempo” neste período de atravessar arestas. Mas como $A(t)$ é um polinômio em t (verifique!), isso significa que $A(t)$ é constante, ou seja $A(t) = 1$, para todo $t \in [0, 1]$. Vamos ver qual o valor de $A(1)$. Ora, os subtriângulos não completos de $T(1)$ são colapsados em vértices ou arestas, que possuem área nula. Somente os subtriângulos completos contribuem para a soma, aqueles cujos rótulos possuem orientação positiva contribuem com $+1$, já que assumimos que o triângulo maior também possui orientação positiva, enquanto aqueles cujos rótulos possuem orientação negativa contribuem com -1 . E assim obtemos exatamente o resultado do caso orientado do Lema de Sperner: o número de simplexes completos com orientação positiva excede em uma unidade o número de simplexes completos com orientação negativa!

Como dissemos, Yoseloff [25] mostrou que o Lema de Sperner pode ser demonstrado usando-se o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Mais exatamente,

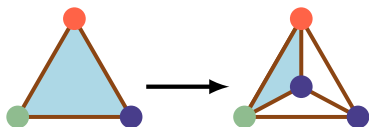
ele mostrou que se o Lema de Sperner fosse falso, seria possível construir uma aplicação contínua de um simplexo em si mesmo que não possuísse pontos fixos, o que seria uma contradição. Como estou mais interessado em argumentos elementares, não vou considerar essa classe de demonstrações indiretas aqui.

Uma outra demonstração elementar foi feita 2 anos antes da de Sperner! Isso mesmo, o Lema de Sperner é essencialmente equivalente ao Lema de Alexander, provado em 1926, história bem contada em [12]. Em resumo, Alexander produziu uma extensa teoria sobre propriedades das *aplicações simpliciais* (aplicações entre complexos simpliciais que levam simplexes em simplexes) e uma delas é justamente o Lema que leva seu nome. Os lemas são equivalentes, mas há uma diferença crucial, que explica o sucesso do Lema de Sperner: o Lema de Sperner trata de rotulações dos vértices, ou seja, inteiros associados aos vértices, os quais podem ser interpretados de várias maneiras, o que torna sua aplicabilidade maior, enquanto o Lema de Alexander é sobre aplicações que levam vértices em vértices, o que é algo mais específico. Além disso, o Lema de Sperner é autocontido, enquanto o Lema de Alexander é o resultado de uma longa sequência de definições e proposições auxiliares. Recomendo a referência acima para quem tiver interesse nos detalhes.²

“Minha Demonstração”

Não poderia terminar de falar das demonstrações do Lema de Sperner sem falar da “minha demonstração”. Não posso garantir que seja original, mas nunca a vi escrita antes. A ideia é mostrar que uma subdivisão cria ou destrói triângulos completos *aos pares*.

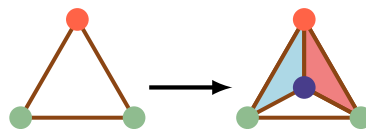
Vamos inicialmente subdividir um triângulo rotulado τ em três subtriângulos, inserindo um vértice v em seu interior, o que chamamos de *subdivisão central*. Temos que considerar três casos. (i) Se τ é completo, apenas um dos subtriângulos será completo também, qualquer que seja a cor de v , uma vez que os outros dois necessariamente compartilham uma aresta com duas cores iguais:



(ii) Se τ é *quase completo*, ou seja, falta apenas uma cor para ser completo, uma subdivisão central com

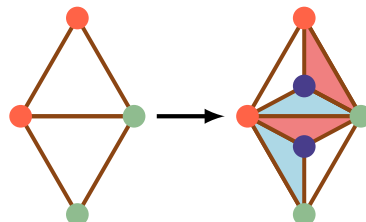
²Existem também generalizações do Lema de Sperner que foram descobertas por Tucker e Fan (ver [22]).

a inserção de um vértice desta cor faltante produzirá dois subtriângulos completos:

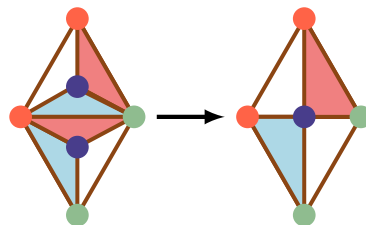


Note que neste caso os subtriângulos completos têm orientações opostas. A inserção de um vértice de outra cor não pode produzir triângulos completos. Finalmente, (iii) se τ não é nem completo nem quase completo, a inserção de um novo vértice não pode criar triângulos completos. Assim, *uma subdivisão central ou não altera o número de triângulos completos, ou aumenta o número em 2*. Se levarmos em conta a orientação, temos que *uma subdivisão central não altera a soma algébrica das orientações*.

Outra subdivisão possível é uma subdivisão de uma aresta e . Ao invés de considerar todos os casos possíveis, vamos implementar uma subdivisão de aresta usando subdivisões centrais e uma *fusão* de vértices. Temos dois casos: (i) se a aresta e for interna, para subdividi-la criando um vértice v em seu interior, vamos inicialmente aplicar uma subdivisão central em cada um dos triângulos incidentes a ela inserindo vértices v' e v'' da mesma cor de v :

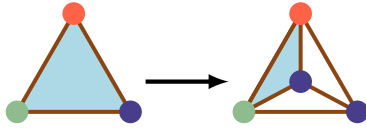


Como já vimos, isso não altera a paridade do número de triângulos completos ou a soma algébrica de suas orientações. Agora vamos “mover” os dois vértices v' e v'' em direção a v para fundi-los em um único vértice:

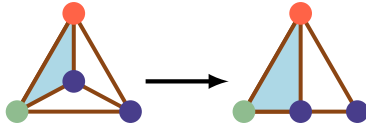


Note que a fusão dos vértices provoca o colapso dos dois triângulos incidentes a aresta e , mas é claro que um deles é completo se, e somente se, o outro também é, portanto *essa fusão de vértices também preserva a paridade do número de triângulos completos ou a soma algébrica de suas orientações*. (ii) Se a aresta e for de fronteira, para subdividi-la inserindo

um vértice v em seu interior, também efetuamos primeiro uma subdivisão central no triângulo incidente a ϵ , inserindo um vértice v' da mesma cor de v :



Mas, como ϵ é de fronteira, a cor de v (e v') não pode ser igual a do vértice de Δ oposto a aresta que contém ϵ , portanto o triângulo colapsado quando fundimos v e v' é necessariamente não completo:



E também a paridade do número de triângulos completos ou a soma algébrica de suas orientações é invariante.

Essas operações de subdivisão são denominadas *subdivisões estelares* [16]. No caso, estamos combinando uma subdivisão estelar com uma atribuição de rótulo (ou cor) ao vértice inserido, ou seja, estamos construindo uma função de rotulação L_{i+1} a partir de L_i à medida que subdividimos a triangulação T_i para obter a triangulação T_{i+1} . Vamos chamar essa combinação de *subdivisão estelar com rotulação*. Dizemos que uma subdivisão estelar com rotulação aplicada a uma triangulação de um simplexo é *própria* se o rótulo do vértice inserido obedece as condições do Lema de Sperner, ou seja, se a função de rotulação L_{i+1} é própria sempre que L_i é própria. Vamos chamar de T_0 a triangulação do n -simplexo Δ que contém um único n -simplexo e L_0 uma função de rotulação completa definida nos $n+1$ vértices de T_0 (portanto T_0 tem um único triângulo completo). Podemos resumir o que encontramos da seguinte forma: a paridade do número de n -simplexos completos (ou a soma algébrica de suas orientações) de uma triangulação própria de um n -simplexo é invariante por subdivisões estelares próprias, donde chegamos ao seguinte

Lema (de Sperner, versão estelar). *Se (T_m, L_m) é um par triangulação-rotulação obtido de (T_0, L_0) por uma sequência de m subdivisões estelares próprias, então existe um número ímpar de n -simplexos completos em (T_m, L_m) (ou o número de simplexos completos com orientação positiva em (T_m, L_m) excede em uma unidade o número de simplexos completos com orientação negativa).*

A versão estelar do Lema de Sperner pode parecer mais fraca que as outras versões que vimos, pois se

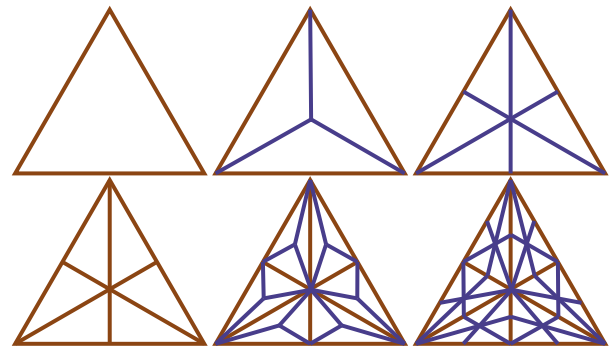


Figura 7: Exemplo de como podemos produzir triangulações arbitrariamente refinadas com subdivisões estelares: a partir do triângulo inicial (cima, esquerda), aplicamos uma subdivisão central (cima, centro) e em seguida uma subdivisão de aresta, para cada aresta do triângulo inicial, obtendo a primeira iteração da subdivisão baricêntrica (cima, direita). O processo é repetido para cada subtriângulo da primeira iteração e obtemos a segunda iteração (baixo, direita).

aplica apenas a triangulações obtidas através de uma sequência de subdivisões estelares. Mas, em geral, esse é o caso nas aplicações do Lema de Sperner³, com frequência usamos *subdivisões baricênticas*, por exemplo, que podem ser expressas em termos de subdivisões estelares (ver figura 7).

Gosto desse argumento porque ele é quase óbvio: uma quantidade de objetos é ímpar porque ela é o resultado de um processo que, começando de um objeto, sempre acrescenta ou remove pares de objetos.

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Vamos agora esboçar brevemente a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer através do Lema de Sperner. Vamos considerar apenas o caso de uma aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \Delta$ do triângulo $\Delta = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ em si mesmo. Para poder aplicar o Lema de Sperner, precisamos atribuir um rótulo $L(v) \in \{0, 1, 2\}$ aos vértices das triangulações que vamos construir. Essa atribuição fica mais simples se usarmos *coordenadas baricêntricas*. Cada ponto $p \in \Delta$ pode ser localizado de maneira única pelo vetor

³Além disso, toda triangulação de um n -simplexo pode ser obtida através de uma sequência de subdivisões estelares e suas inversas. Isso foi demonstrado por Newman, no caso combinatório, e por Morelli e Włodarczyk, no caso geométrico. Mas esses resultados são difíceis (cf. Seção 2 de [13]).

$w(p) = (w_0(p), w_1(p), w_2(p))$, com

$$\begin{aligned} w_0(p) &= \frac{\text{Area}\langle p, v_1, v_2 \rangle}{\text{Area}\langle v_0, v_1, v_2 \rangle} \\ w_1(p) &= \frac{\text{Area}\langle v_0, p, v_2 \rangle}{\text{Area}\langle v_0, v_1, v_2 \rangle} \\ w_2(p) &= \frac{\text{Area}\langle v_0, v_1, p \rangle}{\text{Area}\langle v_0, v_1, v_2 \rangle}, \end{aligned}$$

onde claramente $w_i \geq 0$ e

$$w_0(p) + w_1(p) + w_2(p) = 1.$$

Também é fácil verificar que um ponto p está na aresta $\partial_i \Delta$ se, e somente se, $w_i(p) = 0$.

Vamos definir agora a função

$$g(p) = (g_0(p), g_1(p), g_2(p)),$$

com

$$\begin{aligned} g_0(p) &= w_0(f(p)) - w_0(p) \\ g_1(p) &= w_1(f(p)) - w_1(p) \\ g_2(p) &= w_2(f(p)) - w_2(p). \end{aligned}$$

Note que

$$g_0(p) + g_1(p) + g_2(p) = 1 - 1 = 0 \quad (11)$$

e $g(p) = (0, 0, 0)$ se, e somente se $p = f(p)$, ou seja, se p é um ponto fixo de f . Esse vetor $g(p)$ é o vetor que liga p a $f(p)$ expresso em coordenadas baricêntricas e que, intuitivamente, aponta para o interior, sempre que p está sobre a fronteira de Δ .

Suponha agora que p não é um ponto fixo, de modo que nem todas as coordenadas de $g(p)$ são nulas. Pela equação (11), ao menos uma das coordenadas de $g(p)$ é negativa e ao menos uma é positiva. Seja $L(p)$ o índice da menor coordenada de $g(p)$ (se existirem duas coordenadas iguais e negativas, seja $L(p)$ o menor dos índices). Assim,

$$g_{L(p)}(p) < 0.$$

Se p está na aresta $\partial_i \Delta$, então $w_i(p) = 0$ e consequentemente $g_i(p) = w_i(f(p)) \geq 0$, que não é um valor negativo, portanto i é diferente de $L(p)$, logo

$$p \in \partial_i \Delta \Rightarrow L(p) \neq i,$$

que é a condição para uma rotulação ser própria.

Se p é um ponto fixo, por acaso, atribuímos a $L(p)$ um índice arbitrário que garanta que a rotulação seja própria. Por exemplo, podemos fazer $L(p) = 0$ se $p \notin \partial_0 \Delta$ e $L(p) = 1$, caso contrário.

Em qualquer dos casos, temos que a função de rotulação L satisfaz

$$g_{L(p)}(p) \leq 0. \quad (12)$$

Vamos construir agora uma sequência T_i de triangulações de Δ que vão ficando cada vez mais refinadas à medida que i cresce, ou seja, T_i é tal que o diâmetro do subtriângulo de maior diâmetro de T_i tende a zero quando i tende a infinito. Podemos obter essa sequência tomando sucessivas subdivisões baricênticas do triângulo Δ , por exemplo.

Rotulando os vértices de cada T_i com a função L e aplicando o Lema de Sperner, obtemos uma sequência de triângulos completos $\tau_i \in T_i$ cujos diâmetros tendem a zero quando i tende a infinito. Façamos $p_{j,i}$ o vértice de τ_i rotulado com o índice j (assim, $L(p_{j,i}) = j$) e p_i o baricentro de τ_i , ou seja,

$$p_i = \frac{p_{0,i} + p_{1,i} + p_{2,i}}{3}.$$

Como Δ é um conjunto compacto, p_i possui uma subsequência convergente, de modo que, passando a uma subsequência de p_i se necessário, podemos assumir que p_i converge para um certo ponto p .

Vamos mostrar que este ponto p é um ponto fixo de f . Como o diâmetro de τ_i tende a zero, isso significa que seus vértices $p_{j,i}$ também convergem para p . Ora, como g é uma função contínua, segue que $g(p_{j,i})$ converge para $g(p)$. Mas pela equação (12), $g_j(p_{j,i}) \leq 0$, portanto $g_j(p) \leq 0$ e pela equação (11), a única chance disso ocorrer é se $g(p) = (0, 0, 0)$, logo p é um ponto fixo.

Esse argumento é uma adaptação do que li no livro de M. Henle citado acima. Mas é possível demonstrar o Teorema de Brouwer usando o Lema de Sperner também usando a ideia de *retração* [11] ou a ideia de *cobertura de fechados* [1], que foi o método usado por Knaster, Kuratowski e Mazurkiewicz na década de 20, o que mostra mais uma vez a flexibilidade do Lema de Sperner.

Conclusão

Acho que ficou claro o quanto gosto do Lema de Sperner. Espero que este artigo sirva para despertar o interesse pelo “Meu Teorema Favorito” e pela Matemática em geral nas novas gerações. Algumas das figuras exibidas neste artigo foram geradas manipulando um *site* interativo que desenvolvi e que está disponível em <https://observablehq.com/@vinicius-mello/sperners-lemma>.

Bibliografia

- [1] P. S. Aleksandrov. *Combinatorial Topology, Vol. 1*. Graylock Press, Baltimore, 1956.
- [2] Trefor Bazett. A beautiful combinatorial proof of the Brouwer Fixed Point Theorem - Via Sperner's Lemma. https://www.youtube.com/watch?v=oX9aPNF6_h8, 2018. Acessado: 2023-01-23.
- [3] A.B. Brown and S.S. Cairns. Strengthening of Sperner's lemma applied to homology theory. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 1(47):113–114, 1961.
- [4] Daniel I.A. Cohen. On the Sperner Lemma. *Journal of Combinatorial Theory*, 2(4):585–587, 1967.
- [5] Julio Cesar Santos da Fonseca. O Lema de Sperner como uma Ferramenta para realizar Divisões. Master's thesis, Profmat/UFBA, 2017.
- [6] Thadeu Augusto Rocha de Azambuja. Os Lemas de Sperner no Ensino Médio e uma modesta introdução à Topologia. Master's thesis, Profmat/UNESP, 2014.
- [7] Jean Dieudonné. *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960*. Birkhäuser, Boston, 1989.
- [8] Walter Dröge, Helmut Göttlich, and Friedrich Wille. Das Spernersche Lemma. <https://av.tib.eu/media/11510>, 1982. Acessado: 2023-01-23.
- [9] Ky Fan. Topological proofs for certain theorems on matrices with non-negative elements. *Monatshefte für Mathematik*, 62(3):219–237, 1958.
- [10] M. Henle. *A Combinatorial Introduction to Topology*. Dover Books on Mathematics Series. Dover, 1994.
- [11] J. Huang. On the Sperner Lemma and its Applications. <http://jonathan-huang.org/research/old/sperner.pdf>, 2004. Acessado: 2023-01-23.
- [12] Nikolai V. Ivanov. The lemmas of Alexander and Sperner. <https://arxiv.org/abs/1909.00940>, 2019. Acessado: 2023-01-23.
- [13] Ivan Izmistiev and Jean-Marc Schlenker. Infinitesimal rigidity of polyhedra with vertices in convex position. *Pacific Journal of Mathematics*, 248(1):171–190, oct 2010.
- [14] Tyler Jarvis and James Tanton. The Hairy Ball Theorem via Sperner's Lemma. *The American Mathematical Monthly*, 111(7):599–603, 2004.
- [15] H. W. Kuhn. *A New Proof of the Fundamental Theorem of Algebra*, pages 148–158. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1974.
- [16] William Bernard Raymond Lickorish. Simplicial moves on complexes and manifolds. *Geometry and Topology Monographs*, 2(299-320):314, 1999.
- [17] E.L. Lima. *Homologia básica*. Projeto Euclides. IMPA, 2009.
- [18] Andrew McLennan and Rabee Tourky. Using Volume to Prove Sperner's Lemma. *Economic Theory*, 35(3):593–597, 2008.
- [19] Vinícius Mello. *Novos Métodos Simpliciais em Computação Gráfica*. PhD thesis, IMPA, 2006.
- [20] Sehie Park. Ninety Years of the Brouwer Fixed Point Theorem. *Vietnam Journal of Mathematics*, 27, 01 1999.
- [21] Burkard Polster (Mathologer). NYT: Sperner's lemma defeats the rental harmony problem. <https://www.youtube.com/watch?v=7s-YM-kcKME>, 2017. Acessado: 2023-01-23.
- [22] Yu. A. Shashkin. Local degrees of simplicial mappings. *Publ. Math. Debrecen*, 45(3–4):407–413, 1994.
- [23] Emanuel Sperner. Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 6(1):265–272, 1928.
- [24] Francis Edward Su. Rental harmony: Sperner's lemma in fair division. *The American Mathematical Monthly*, 106(10):930–942, 1999.
- [25] Mark Yoseloff. Topologic Proofs of Some Combinatorial Theorems. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 17(1):95–111, 1974.



Vinícius Mello nasceu em Salvador e obteve seu doutorado em Computação Gráfica no IMPA. Ensina matemática na UFBA e fica alegre sempre que pode usar o GeoGebra em suas aulas. Gosta de matemática, música e programação em exata proporção, podendo ser encontrado a (quase) qualquer momento fazendo ao menos uma dessas coisas.

DIÁLOGO

Eliza Maria Veras da Silva

Márcia Barbosa de Menezes

A seção DIÁLOGO da Revista de Matemática Hipátia é um espaço de encontros, conversas, trocas de ideias e divulgação de história de vida, trajetórias acadêmicas e realizações das pessoas que contribuíram para a construção da Matemática.

Neste momento, abriremos nosso encontro conversando com a primeira Doutora em Matemática da Bahia e uma das primeiras do Brasil, a doutora Eliza Maria Ferreira Veras da Silva — uma mulher que pode ser reconhecida como uma “guerreira negra”.

Agradecemos imensamente à professora Eliza pela oportunidade de conhecermos um pouco da sua trajetória de vida acadêmica.

Pequena Biografia

Eliza Maria Ferreira Veras da Silva nasceu no dia 4 de fevereiro de 1944, na cidade de Ituberá, Bahia, filha de uma relação inter-racial, entre Dahil Ferreira, mãe branca e dona de casa, e Edgard Moreira Rosa, pai negro e coletor da Receita¹. Na época em que Eliza terminou o ensino primário, para prosseguir os estudos era necessário fazer o chamado exame de admissão ao ginásio. Ela já demonstrava bom desenvolvimento escolar e queria prosseguir os estudos. Como residia no interior, só lhe restavam duas opções: escola pública ou escola particular para formar-se como professora primária. Mas sua condição financeira não lhe permitiria escolher a escola privada. Com a intervenção de seu tio, que trabalhava na escola parti-

cular, Eliza teve a chance de participar do exame e, caso fosse aprovada, teria a oportunidade de receber uma bolsa de estudos para prosseguir sua formação. Eliza foi aprovada e continuou seus estudos até a chamada Escola Normal, correspondendo ao Ensino Médio atual.



Figura 1: Professora Eliza Maria.

Durante o período do curso de normalista, Eliza foi uma excelente aluna, manteve durante todos os três anos de estudo a média 10 (dez) em todas as disciplinas — um mérito exemplar, o que a levou a ser agraciada com uma bolsa de estudos ofertada pela Phillips².

²Na verdade, foram duas bolsas: no segundo ano do curso, Eliza recebeu uma bolsa da Philipps para custear os estudos do 3º ano. E, no final do curso, recebeu outra bolsa da Philipps como prêmio. A Phillips é uma empresa holandesa com produtos voltados para a tecnologia, produtos de consumo e estilo de vida.

A premiação recebida pela Phillips proporcionou a Eliza a oportunidade de começar a sonhar com um voo mais alto em direção aos estudos universitários, algo até então inimaginável para uma jovem de baixa renda.

Com a premiação, Eliza resolveu se mudar para Salvador e prestar concurso para docente estadual. Foi aprovada e nomeada professora do Estado assumindo a função no Colégio Antônio Euzébio no turno noturno e, paralelamente, se preparava para realizar o Exame Vestibular. Com o coração pulsando pelo estudo da matemática, Eliza fez vestibular na Universidade Federal da Bahia em 1964 e foi aprovada em 2º lugar. Formou-se em 1967 nas duas habilitações, Licenciatura e Bacharelado, iniciando então sua trajetória acadêmica.

Começou a lecionar no Colégio Central, no chamado Curso Colegial, ingressando depois, em 1969, no Instituto de Matemática da UFBA como docente, assumindo o cargo de Auxiliar de Ensino, com carga horária de 20 horas. Nesse período, ela conviveu com a professora Lolita Campos Carneiro, diretora do Instituto na época, que lhe ofereceu uma bolsa de estudos de 8 meses, financiada pela Unesco, para a realização do curso de mestrado na França. Em 1973, ela concluiu seu mestrado com a dissertação intitulada “Matrizes de Permutação e Leis de Casamento nas Sociedades Primitivas”, defendida na Universidade de Montpellier, sob a orientação do matemático brasileiro, residente na França, Artibano Micali.

Eliza voltou ao Brasil e continuou seus estudos, mantendo o intercâmbio de orientação com o professor Artibano. Após um período, o professor Artibano conseguiu uma bolsa de estudos do governo francês para ajudá-la a voltar à França e realizar seu doutoramento. Eliza defendeu sua tese de doutorado em Álgebra, intitulada “Álgebras Não Associativas”, em 1977.

Eliza foi construindo suas estratégias de sobrevivência, superando muitas vezes seus próprios limites de cansaço físico e emocional, na luta para progredir no espaço profissional escolhido. Ao alcançar o grau de Doutora em Matemática, ela se tornou merecedora de reconhecimento e de exemplaridade para outras mulheres negras, que podem confiar em seus próprios potenciais pessoais e culturais.

Entrevista

RMH — Como e quando surgiu o seu interesse pela Matemática?

Eliza — Na verdade, não sei lhe dizer quando e nem como surgiu meu interesse. O que eu posso lhe dizer é que sempre fui boa aluna em todas as disciplinas. Como a Matemática é uma disciplina exata, eu comecei a ter uma tendência maior para estudá-la e fui me apaixonando e me aprimorando. Na quarta série do Curso Primário (atual Ensino Fundamental), tive nota dez em todas as matérias, inclusive em Matemática. Então, fui estudando, me sentindo empolgada e, quando chegou a época do vestibular, fiz a escolha pela Matemática. Sempre adorei estudar Matemática desde pequena. Tinha facilidade. Não houve incentivo de pessoas, professores/as, o gosto pela matemática foi algo meu, veio de dentro. Foi espontâneo.

RMH — Quais foram as maiores dificuldades que encontrou no estudo da Matemática?

Eliza — Na verdade, não tive dificuldade, pois sempre foquei meu interesse na disciplina e achava prazeroso estudar.

RMH — Como você vê a situação do ensino da Matemática no Brasil nos dias atuais?

Eliza — Olhe, eu acho o seguinte: um dos motivos de os estudantes não gostarem da Matemática é a disciplina não ser bem transmitida para eles. Como não é bem transmitida, eles vão levando de qualquer jeito e passam a dizer que não gostam da matéria. Eu nunca tive problema com meus alunos, porque eu gostava de ensinar. Ensinaava com amor, com carinho, detalhando os conteúdos.

RMH — E em relação ao gênero, acha que há diferenças entre aprendizado e interesse de meninos e meninas?

Eliza — Não, de forma alguma. Tanto os homens quanto as mulheres podem se desenvolver da mesma forma, o importante é estarem fazendo o que gostam, o que desejam. Não há diferença cognitiva. O que acho é que os homens visam mais o lado material das coisas, da profissão, as mulheres, não. Nós buscamos o nosso ideal, lutamos com garra para alcançarmos o que queremos. Mas as mulheres realmente mantêm uma ligação forte com a família. As mulheres assumem a casa, a criação dos filhos, é uma dupla jornada. Isso pode abalar a trajetória profissional das mulheres. Os homens estão livres desses atributos.

RMH — Em sua opinião, a questão das tarefas domésticas interfere no desenvolvimento/produção de homens e de mulheres? Como era na sua época e como vê isso agora?

Eliza — Como já estou afastada do campo acadêmico, não sei bem dizer, mas realmente as mulheres assumem as tarefas e o cuidado com a casa e filhos. Acho que deve haver ajuda. Na minha época, eu vivia com mamãe e tinha ajuda, isso não me preocupava.

RMH — Como a senhora vê a presença das mulheres no trabalho científico?

Eliza — Eu acredito que qualquer pessoa pode realizar o que deseja. É preciso estudo e empenho em todas as áreas.

RMH — Como foi sua trajetória em Matemática enquanto mulher negra?

Eliza — Eu vivi a discriminação no momento de realizar meu exame de admissão na época. Fiz o exame e, na época, havia uma verdadeira euforia e atenção pelos resultados. Eu estava na pracinha brincando durante uma quermesse, quando ouvi um comentário entre várias mães que conversavam na praça: “Ah, saiu o resultado da admissão da Escola Normal, quem passou em 1º lugar foi uma ‘neguinha aí’”. Eu ainda não sabia que essa ‘neguinha’ era eu. Esse discurso era porque havia outras meninas de classe, filhas de A e B, que não passaram. Depois não observei isso, inclusive tive muitas colegas lourinhas e de olhos verdes de quem frequentava a casa, e não havia discriminação. Porém, quando eu ia ao salão de beleza com mamãe — eu adorava pintar as unhas desde os sete anos —, mamãe ficava revoltada quando acontecia alguma insinuação em relação a eu não ser filha dela (mãe branca, filha negra).

RMH — Havia outras mulheres negras durante sua formação, durante sua vida acadêmica?

Eliza — Em toda minha trajetória acadêmica, sempre convivi com pouquíssimas pessoas negras na sala de aula, mas quero dizer que não havia problemas, graças a Deus. Olha, acho que o fato de minha mãe ser uma mulher ‘alva’ e minha irmã Virgínia ser branca atenuava a discriminação.

RMH — A senhora tinha noção do quanto seu título de Doutorado em Matemática seria um importante trunfo de exemplaridade para as novas gerações?

Eliza — Olhe, sinceramente, eu nunca me apeguei a isso não. Atualmente é que tenho recebido pessoas aqui que me dizem isto de ser a primeira doutora negra em Matemática, mas eu nunca tinha me ligado nesse fato. Eu sempre levei “en passant”. Não fiz nada pensando em títulos. Fui fazendo meus aprimoramentos nos estudos sem essa preocupação de ser isso ou aquilo. Fiz o mestrado e o doutorado porque apareceu essa oportunidade na época. Era jovem, tive bolsa, confiei e eu fui fazendo. Nada foi pensado na época. Ia fazendo os cursos e deixando para lá.

RMH — Por que acha que o título de Primeira Doutora em Matemática da Bahia e do Brasil ficou invisível durante muito tempo?

Eliza — Não sei dizer, o que sei é que só começou a se falar nisso quando minha ex-aluna Márcia começou a investigar. Ou seja, minhas alunas começaram a buscar a história e foram resgatando as realizações. Foram mulheres que tiraram do apagamento minhas realizações.

RMH — Como a senhora vê o protagonismo das mulheres negras matemáticas nos dias atuais?

Eliza — Nunca deixei que a questão da cor da pele interferisse na minha vida, exatamente por isso, não sei bem dizer sobre isso. Porque, para mim, não importa a cor, o importante é termos pessoas realizando e conquistando seus espaços de forma pessoal e honesta.

RMH — Que conselho daria para que o ensino de Matemática seja algo divertido/atraente?

Eliza — O conselho é fazer com que os alunos se atenham mais aos estudos. Os assuntos sejam apresentados com maior prazer e, principalmente, de forma correlacionada com o dia a dia das pessoas. A interação entre os tópicos é fundamental. Eu acho que a formação dos professores é muito importante. Os primeiros anos de estudos para as crianças deveriam ser realizados por docentes capacitados para o ensino da Matemática, dessa forma, o medo da disciplina seria amenizado.

RMH — O que mais gosta no estudo da Matemática?

Eliza — Em matemática eu adoro tudo. Tenho prazer nos estudos, no ensinar, enfim, adoro.

RMH — O que diria para incentivar mais meninas/meninos a estudarem Matemática?

Eliza — Primeiro, eu mostraria para eles que a Matemática está presente em tudo na vida e, dessa forma, eles deveriam observar a importância desse estudo. Tem Matemática na cozinha, nas compras, nos trocos, no futebol, enfim, em cada detalhe da vida.

RMH — Tem ainda algo que gostaria de registrar?

Eliza — Gostaria de dizer que a formação dos professores e das professoras é fundamental. É importante que o ensino esteja nas mãos de pessoas que sintam prazer em ensinar, que se aprimorem e busquem transmitir o conhecimento de forma empolgante. Além disso, quero dizer que não importa se é menino ou menina, branco, loiro, negro, qualquer pessoa pode estudar e ser o que quiser ser, realizar os sonhos que desejar.

Entrevista realizada para a Revista de Matemática Hipátia (RMH) pela docente do IME Márcia Barbosa de Menezes em 15 de dezembro de 2022 na residência da professora Eliza.



Márcia Barbosa de Menezes é docente do Departamento de Matemática da UFBA. Mestra em Matemática e Doutora em Estudos Interdisciplinares sobre Mulheres, Gênero e Feminismo. Atua na Pesquisa com o tema: “Trajetórias de Mulheres Matemática na

Bahia: desafios e superações”, e no projeto de Extensão “Matemática é coisa de Menina”. Seu foco é incentivar meninas e jovens mulheres a admirarem, ingressarem e permanecerem atuantes na área das Ciências Exatas.

TÉCNICA

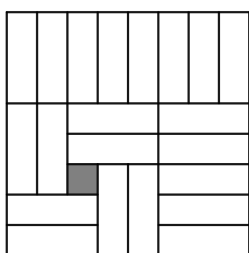
Números Complexos em Combinatória

Samuel Feitosa

Um problema de motivação

O leitor já deve ter se deparado alguma vez com problemas recreativos, mais popularmente conhecidos como *Puzzles* ou Quebra-cabeças, que contêm alguma pergunta divertida cuja solução depende de algum argumento matemático ou do emprego de alguma TÉCNICA inusitada. Esse é o propósito do exercício a seguir.

Exercício 1. Um triminó é um retângulo 3×1 . Um monominó é um único quadrado 1×1 . Quais as possíveis posições de um monominó em uma cobertura de um tabuleiro 8×8 usando 21 triminós e 1 monominó?



Convidamos o leitor a tentar resolvê-lo antes de continuar a ler nas próximas linhas a solução (inesperada) que envolverá números complexos.

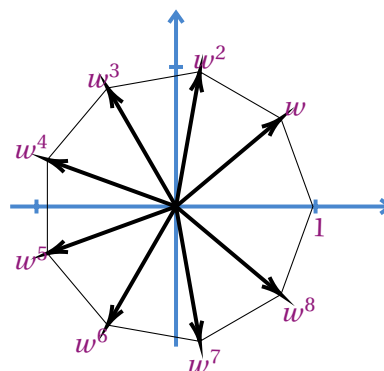
Preliminares

Dado um n inteiro positivo, uma *raiz n -ésima da unidade* é qualquer número complexo w que satisfaz a equação

$$x^n = 1. \quad (1)$$

Um desses números é $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ e qualquer outro que também satisfaz a equação é uma de suas potências:

$$w^2, w^3, w^4, \dots$$



Essas potências são os vértices de um polígono regular de n lados com centro na origem. Existe uma estrutura algébrica atrelada às raízes de (1) que cria uma importante conexão com fenômenos de contagem. A primeira parte dessa estrutura é que o produto de quaisquer duas raízes também é uma raiz. De fato, se $x_1^n = 1$ e $x_2^n = 1$, então $(x_1 x_2)^n = 1$. A segunda parte é que o inverso de uma raiz também é uma raiz, pois se $x^n = 1$ então $(1/x)^n = 1$. A tabela a seguir é um exemplo de *tabuada* multiplicativa das raízes cúbicas da unidade, i.e., das raízes de $x^3 = 1$. Note que $w^3 = w^0 = 1$.

Vejamos um exercício envolvendo uma raiz quarta da unidade e números binomiais.

$\times$	w^0	w^1	w^2
w^0	w^0	w^1	w^2
w^1	w^1	w^2	w^0
w^2	w^2	w^0	w^1

Exercício 2. (ITA) Para cada n , temos que

$$1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \dots - \binom{4n}{4n-2} + 1$$

é igual a:

- a) $(-1)^n \cdot 2^{2n}$ b) 2^{2n} c) $(-1)^n \cdot 2^n$
d) $(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n}$ e) $(-1)^{n+1} \cdot 2^n$.

Solução. Para calcular a soma dos números binomiais de índices pares ou ímpares, é conhecido o uso da soma $(1+1)^n + (1-1)^n$. Como $i^2 = -1$, para encontrar a soma alternada descrita no problema, calculemos

$$\begin{aligned} (i+1)^{4n} &= \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} i^k \\ ((i+1)^2)^{2n} &= \sum_{j=0}^{2n} \binom{4n}{2j} i^{2j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{4n}{2j+1} i^{2j+1} \\ (2i)^{2n} &= \sum_{j=0}^{2n} \binom{4n}{2j} (-1)^j \\ &\quad + i \left(\sum_{j=0}^{2n-1} \binom{4n}{2j+1} (-1)^j \right). \end{aligned}$$

Como $(2i)^{2n} = (-1)^n 2^{2n}$ é número real, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2n} \binom{4n}{2j} (-1)^j &= (-1)^n 2^{2n} \text{ e} \\ \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{4n}{2j+1} (-1)^j &= 0. \end{aligned}$$

A resposta é a letra A.

Outra propriedade relevante sobre raízes n -ésimas da unidade é que a soma de todas elas é sempre zero. Para verificar isso, se $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, então $w^n - 1 = 0$ e daí

$$(w-1)(w^{n-1} + w^{n-2} + \dots + w + 1) = 0.$$

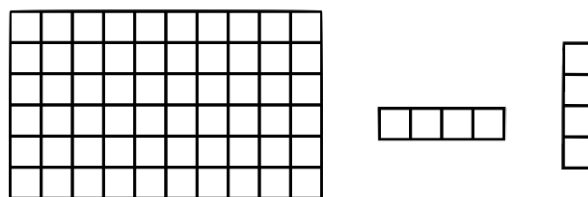
Como $w \neq 1$, temos

$$w^{n-1} + w^{n-2} + \dots + w + 1 = 0.$$

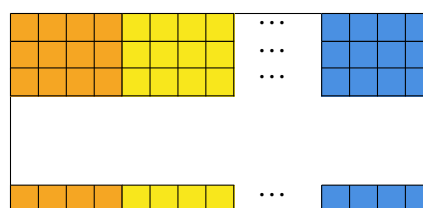
De forma mais geral, se $n \nmid k$, como $w^k \neq 1$, temos

$$\begin{aligned} w^{k(n-1)} + w^{k(n-2)} + \dots + w^k + 1 &= \frac{w^{nk} - 1}{w^k - 1} \\ &= \frac{1 - 1}{w^k - 1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, vejamos uma aplicação real em um problema de combinatória. É possível cobrirmos um tabuleiro 6×10 com peças 1×4 , que podem ser colocadas na vertical ou horizontal sem sobreposição?



Uma abordagem natural é contar o total de quadradinhos do tabuleiro, que é $6 \cdot 10 = 60$, e notar que ele é múltiplo de 4. Assim, precisaríamos de $60/4 = 15$ peças 1×4 para cobrir. Infelizmente, apenas essa condição não é suficiente. Por exemplo, apesar de um tabuleiro 2×2 ter uma quantidade de quadradinhos múltiplo de 4, claramente não podemos cobri-lo com peças 1×4 . Por outro lado, se uma das dimensões do tabuleiro for múltiplo de 4, é fácil imaginar uma cobertura: basta cobrir esse lado com peças enfileiradas e repetir essa configuração nas demais linhas ou colunas.



O próximo teorema responde essa pergunta em geral.

Teorema 1. (Klarner) Sejam m, n, p inteiros positivos dados. Se podemos cobrir um tabuleiro $m \times n$ usando peças $1 \times p$, sem sobras ou superposições de peças, então p divide m ou p divide n .

Demonstração. Suponha que podemos cobrir o tabuleiro como se pede. Para que a peça caiba no tabuleiro, devemos ter $p \leq \max\{m, n\}$. Particione o tabuleiro em m linhas $1 \times n$ e n colunas $1 \times m$, numerando as linhas do mesmo de cima para baixo, de 1 a m , e as colunas da esquerda para a direita, de 1 a n (como em uma matriz $m \times n$). Em seguida escreva, na casa

ij do tabuleiro, o número complexo w^{i+j} , em que $w = \text{cis } \frac{2\pi}{p}$. A soma de todos os números escritos na linha i é

$$\begin{aligned} w^{i+1} + w^{i+2} + \dots + w^{i+n} &= w^i(w + w^2 + \dots + w^n) \\ &= w^{i+1} \cdot \frac{w^n - 1}{w - 1}. \end{aligned}$$

Somando agora para todas as linhas, podemos concluir que a soma dos números no tabuleiro é

$$\sum_{i=1}^m w^{i+1} \cdot \frac{w^n - 1}{w - 1} = w^2 \cdot \frac{w^n - 1}{w - 1} \cdot \frac{w^m - 1}{w - 1}.$$

Vamos calcular essa soma agora de outra maneira. Considere uma peça $1 \times p$ na horizontal ocupando as casas de entradas:

$$(i, j), (i+1, j), (i+2, j) \dots (i+p-1, j).$$

A soma dos números correspondentes a essas casas é

$$\begin{aligned} w^{i+j} + w^{i+1+j} + w^{i+2+j} + \dots + w^{i+p-1+j} &= \\ w^{i+j} \cdot (1 + w + \dots + w^{p-1}) &= \\ w^{i+j} \cdot \frac{w^p - 1}{w - 1} &= \\ &= 0. \end{aligned}$$

O mesmo argumento se aplica quando a peça está na vertical. Assim, como o tabuleiro pode ser coberto, agrupando os números das casas pertencentes a uma mesma peça, podemos concluir que a soma total dos números do tabuleiro é 0. Ou seja,

$$w^2 \cdot \frac{w^n - 1}{w - 1} \cdot \frac{w^m - 1}{w - 1} = 0.$$

Para que isso ocorra, devemos ter $w^n - 1 = 0$ ou $w^m - 1 = 0$ e assim $p \mid n$ ou $p \mid m$. Para verificar que é sempre possível cobrir o tabuleiro quando uma de suas dimensões é divisível por p , basta imitar a figura anterior.

□

O próximo exercício é uma aplicação direta das ideias da demonstração anterior

Exercício 3. (Olimpíada Russa) Encontre o menor inteiro n tal que um tabuleiro $n \times n$ pode ser particionado em subtabuleiros 40×40 e 49×49 de modo que ambos os tipos de quadrados estejam presentes na partição.

Solução. Assim como na solução anterior, vamos considerar uma numeração para as linhas e colunas do tabuleiro como em uma matriz $n \times n$ e associar a cada quadradinho (i, j) o número complexo $w^i \xi^j$, em que $w = \text{cis } \frac{2\pi}{40}$ e $\xi = \text{cis } \frac{2\pi}{49}$. A soma total dos números escritos no tabuleiro é

$$\begin{aligned} (w^1 + w^2 + \dots + w^n)(\xi^1 + \xi^2 + \dots + \xi^n) &= \\ \frac{w(w^n - 1)}{w - 1} \cdot \frac{\xi(\xi^n - 1)}{\xi - 1}. \end{aligned}$$

De modo semelhante, se (i, j) é o quadradinho do canto superior esquerdo de um quadrado $k \times k$, então a soma de todos os números em seus quadradinhos é

$$\begin{aligned} (w^i + w^{i+1} + \dots + w^{i+k-1})(\xi^j + \xi^{j+1} + \dots + \xi^{j+k-1}) &= \\ \frac{w^i(w^k - 1)}{w - 1} \cdot \frac{\xi^j(\xi^k - 1)}{\xi - 1} &= \\ 0, \end{aligned}$$

pois se $k = 40$, então $w^k - 1 = 0$ e se $k = 49$ então $\xi^k - 1 = 0$. Portanto, caso seja possível tabuleiro com tais quadrados, a soma de todos os números escritos deve ser 0 e daí

$$\frac{w(w^n - 1)}{w - 1} \cdot \frac{\xi(\xi^n - 1)}{\xi - 1} = 0.$$

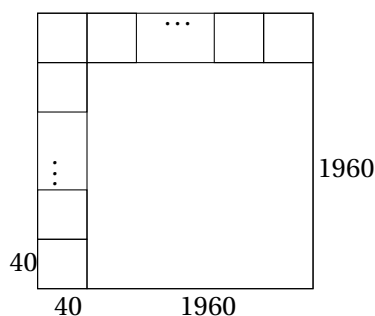
Se $w^n - 1 = 0$ temos $40 \mid n$ e se $\xi^n - 1 = 0$ temos $49 \mid n$. Para tratar desses dois casos, sejam a e b as quantidades de quadrados de tamanhos 40×40 e 49×49 usados na cobertura, respectivamente. Assim, considerando o total de quadrados cobertos, temos

$$n^2 = a \cdot 40^2 + b \cdot 49^2.$$

i) Se $40 \mid n$, temos que $40^2 \mid b \cdot 49^2$, e como $\text{mdc}(40, 49) = 1$, segue que $40^2 \mid b$. Assim, como a e b são positivos, podemos estimar

$$\begin{aligned} n^2 &= a \cdot 40^2 + b \cdot 49^2 \\ &> 40^2 \cdot 49^2 \\ &= (40 \cdot 49)^2. \end{aligned}$$

Daí, n é pelo menos $40 \cdot 49 = 2000$. Para mostrar que é possível cobrir um tabuleiro 2000×2000 com tais peças, cubra a borda esquerda e superior com quadrados 40×40 como na figura a seguir.



Para cobrir o restante da região, que é um quadrado de lado $1960 = 40 \cdot 49$, crie 40 linhas e 40 colunas com espaçamento de 49 quadradinhos e cubra com 40^2 quadrados de lado 49.

- ii) Se $49 \mid n$, de modo semelhante ao caso anterior, $49^2 \mid a$ e daí $n \geq 49 \cdot 41 = 2009 > 2000$.

Considerando ambos os casos, o menor valor possível para n é 2000.

O próximo exercício ilustra a técnica de associarmos funções geradoras a problemas de contagem.

Exercício 4. (Olimpíada Chinesa) Encontre o número de subconjuntos de $\{1, 2, 3, \dots, 2000\}$ tais que a soma dos elementos é divisível por 5.

Solução. Antes de resolver o exercício proposto, considere um enunciado mais simples em que queremos apenas contar quantos subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ possuem soma de seus elementos igual a 3. Um solução seria listar explicitamente todos os 8 subconjuntos e calcular para cada um deles a soma de seus elementos:

$\emptyset$	$\rightarrow$	0
$\{1\}$	$\rightarrow$	1
$\{2\}$	$\rightarrow$	2
$\{3\}$	$\rightarrow$	3
$\{1, 2\}$	$\rightarrow$	3
$\{1, 3\}$	$\rightarrow$	4
$\{2, 3\}$	$\rightarrow$	5
$\{1, 2, 3\}$	$\rightarrow$	6

Considere agora o polinômio

$$\begin{aligned} p_3(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \\ &= x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Para obter a expressão da última linha, utilizamos a propriedade distributiva. Note que cada monômio de

$p_3(x)$ pode ser associado a um subconjunto de $\{1, 2, 3\}$. Por exemplo, o monômio x^4 surge através do produto $x^1 \cdot 1 \cdot x^3$, que pode ser interpretado da seguinte forma: no primeiro parênteses escolhemos x^1 , no segundo não escolhemos x^2 e no terceiro escolhemos x^3 . Essas escolhas podem ser associadas ao subconjunto $\{1, 3\}$. Note que, associadas ao mesmo monômio x^3 , existem duas escolhas de subconjunto: $x^1 \cdot x^2 \cdot 1$ e $1 \cdot 1 \cdot x^3$. Por isso o seu coeficiente na expressão que determina $p_3(x)$ é 2. É possível fazer uma correspondência biunívoca entre as somas de elementos de subconjuntos de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ que valem k e os monômios x^k que aparecem no desenvolvimento de

$$p_n(x) = (1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n).$$

Assim, para resolver o problema, basta somarmos todos os coeficientes dos monômios x^k em $p_{2000}(x)$ quando k é um múltiplo de 5. Para calcular essa soma vamos precisar das raízes quintas da unidade! Seja $w = \text{cis} \frac{2\pi}{5}$. Como w, w^2, w^3 e w^4 são as raízes de $1+x+x^2+x^3+x^4=0$, segue que

$$1+x+x^2+x^3+x^4 = (x-w)(x-w^2)(x-w^3)(x-w^4).$$

Substituindo $x = -1$, temos

$$1 = (1+w)(1+w^2)(1+w^3)(1+w^4).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^5 (1+w^{5k+j}) &= \\ (1+w)(1+w^2)(1+w^3)(1+w^4)(1+1) &= 2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} p_{2000}(w) &= \\ \prod_{k=0}^{399} \prod_{j=1}^5 (1+w^{5k+j}) &= \\ \prod_{k=0}^{399} 2 &= 2^{2000}. \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos provar que

$$p_{2000}(w^2) = p_{2000}(w^3) = p_{2000}(w^4) = 2^{400}.$$

Além disso, é fácil ver que $p_{2000}(1) = 2^{2000}$. Como $1^k + w^k + w^{2k} + w^{3k} + w^{4k} = 0$, se $5 \nmid k$, e 5 em caso contrário, se $l = \frac{2000-2001}{2}$ e

$$p_{2000}(x) = \sum_{i=0}^l a_i x^i,$$

segue que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^4 p_{2000}(w^j) &= \\ \sum_{i=0}^l a_i(1 + w^i + w^{2i} + w^{3i} + w^{4i}) &= \\ \sum_{i \equiv 0 \pmod{5}} 5a_i. \end{aligned}$$

Finalmente, o número que procuramos é dado por

$$\begin{aligned} \sum_{i \equiv 0 \pmod{5}} a_i &= \frac{1}{5} \sum_{j=0}^4 p_{2000}(w^j) \\ &= \frac{2^{2000} + 4 \cdot 2^{400}}{5}. \end{aligned}$$

A solução do problema original

Para resolver o problema original, novamente vamos considerar uma numeração para as linhas e colunas do tabuleiro como em uma matriz 8×8 , mas dessa vez vamos associar a cada quadradinho (i, j) o monômio $x^i y^j$. A soma de todos os monômios escritos nas casas do tabuleiro gera o polinômio

$$\begin{aligned} p(x, y) &= (x + x^2 + \dots + x^8)(y + y^2 + \dots + y^8) \\ &= xy \cdot \frac{x^8 - 1}{x - 1} \cdot \frac{y^8 - 1}{y - 1}. \end{aligned}$$

Considere agora uma cobertura qualquer do tabuleiro e suponha que o monominó ocupa a casa (ab) . Se um triminó na posição horizontal tem como casa do canto esquerdo a posição (i, j) , a soma dos seus monômios associados é

$$x^i y^j + x^{i+1} y^j + x^{i+2} y^j = x^i y^j (1 + x + x^2).$$

Portanto, a soma de todos os monômios em peças na horizontal corresponde a um polinômio múltiplo de $(1 + x + x^2)$, digamos o $(1 + x + x^2)q_1(x, y)$. De modo análogo, a soma de todos os monômios escritos nas peças na vertical é um polinômio múltiplo de $1 + y + y^2$, que denotaremos por $(1 + y + y^2)q_2(x, y)$. Assim,

$$p(x, y) = (1 + x + x^2)q_1(x, y) + (1 + y + y^2)q_2(x, y) + x^a y^b.$$

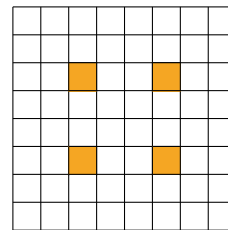
Seja $w = \text{cis } \frac{2\pi}{3}$. Como $1 + w + w^2 = 0$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} w^a w^b &= p(w, w) \\ &= w^2 \frac{w^8 - 1}{w - 1} \cdot \frac{w^8 - 1}{w - 1} \\ &= w^2 \frac{w^2 - 1}{w - 1} \cdot \frac{w^2 - 1}{w - 1} \\ &= w^2 (w + 1)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w^a w^{2b} &= p(w, w^2) \\ &= w^3 \frac{w^8 - 1}{w - 1} \cdot \frac{w^{16} - 1}{w^2 - 1} \\ &= \frac{w^2 - 1}{w - 1} \cdot \frac{w - 1}{w^2 - 1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como $w^k = 1$ apenas quando k é um múltiplo de 3, podemos concluir que $a + b$ e $a + 2b$ são múltiplos de 3 e, conseqüentemente, a e b são múltiplos de 3. Isso nos diz que as únicas posições que podem receber o monominó em uma cobertura são as que estão pintadas de laranja na próxima figura e representam as posições $(3, 3)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$ e $(6, 6)$.



Para verificar que todas elas são possíveis, perceba que a primeira cobertura apresentada no enunciado nos garante que uma delas é admissível. Agora perceba que basta rodar o tabuleiro três vezes por 90° no sentido horário para obter coberturas para as outras três posições. Isso conclui a solução.

Exercícios e sugestões de leituras

Exercício 5. (IME) Mostre que

$$\sum_{k \equiv 0 \pmod{3}} \binom{n}{k} = \frac{1}{3} [2^n + 2 \cos(n\pi/3)].$$

Dica: Seja $q(x) = (1 + x)^n$ e $w = \text{cis } \frac{2\pi}{3}$. Quanto vale $q(1) + q(w) + q(w^2)$?

Exercício 6. (IMO 1974) Prove que o número

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$$

não é divisível por 5 para qualquer inteiro $n \geq 0$.

Dica: Perceba que $2^3 \equiv -2 \pmod{5}$ e que a soma dada tem o mesmo resto que $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-2)^k$ na divisão por 5. Em seguida, faça a expansão binomial do número $(1 + i\sqrt{2})^{2n+1}$.

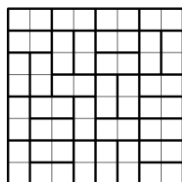
Exercício 7. (Olimpíada de São Petesburgo) A sequência finita $a_1, a_2, \dots, a_n$ é chamada p -balanceada se qualquer soma da forma $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \dots$ é a mesma para qualquer $k = 1, 2, \dots, p$. Prove que se a sequência com 50 membros é p -balanceada para $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$ então todos estes números são iguais a zero.

Exercício 8. (Fórmula da Multiseccção) Se $f(x) = \sum_k a_k x^k$, mostre que

$$\sum_{k \equiv r \pmod{m}} a_k x^k = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} w^{-rs} f(w^s x),$$

em que $w = e^{2\pi i/m}$.

Uma pergunta interessante que poderia ser feita na linha da discussão do problema original é determinar de quantos modos podemos cobrir o tabuleiro 8×8 com 21 trininós e 1 monominó?



Para um tabuleiro 8×8 sendo coberto apenas com dominós, que são peças 2×1 , existem 12988816 coberturas dele com 32 dominós. A figura anterior ilustra uma delas. Na referência [5] o leitor poderá encontrar a seguinte (surpreendente) fórmula para o número de coberturas de um tabuleiro $m \times n$ com dominós:

$$\left[\prod_{k=1}^m \prod_{l=1}^n \left(2 \cos \frac{\pi k}{m+1} + 2i \cos \frac{\pi l}{n+1} \right) \right]^{1/2}.$$

O problema original é da referência [2]. Para aplicações de raízes da unidade, como no Teorema de Klarner, recomendamos o capítulo 13 do excelente [1].

Bibliografia

- [1] A. C. Muniz Neto, *An Excursion Through Elementary Mathematics, Volume III: Discrete Mathematics and Polynomial Algebra*, 1st ed. Springer, 2018.
- [2] R. Honsberger, *In Polya's Footsteps: Miscellaneous Problems and Essays*, Mathematical Association of America, 1997.
- [3] E. Lozansky and C. Rousseau, *Winning Solutions*, 1st ed. Springer, 1996.
- [4] T. Andreescu, Z. Feng, and G. Yu, *Mathematical Olympiads 2000-2001: Problems and Solutions from Around the World*, 1st ed. Mathematical Association of America, 2003.
- [5] J. Matousek and J. Nešetřil, *Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra*, American Mathematical Society, 2010.



Samuel Feitosa é professor na Universidade Federal da Bahia desde 2012. Foi medalhista de Bronze na Olimpíada Internacional de Matemática em 2003 e é membro da Comissão Nacional de Olimpíadas de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Contribui ativamente na organização de olimpíadas e treinamentos de alunos para diversas competições matemáticas nacionais e internacionais.

SIMPÓSIO Eventos DMAT Janeiro/22 a Junho/23

Cristina Lizana, Henrique da Costa, Roberto Sant'Anna

Introdução

Sendo esta a primeira edição da Revista de Matemática Hipátia, faremos, nesta seção SIMPÓSIO, uma breve resenha de eventos organizados por membros da comunidade do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal da Bahia. Alguns deles já aconteceram ao longo do ano 2022 e outros irão ser realizados neste 2023.

Vários desses eventos têm caráter permanente, tais como o Seminário Café Cultural e o Programa de Verão da Pós-graduação em Matemática. Outros são eventuais, realizados por diversos membros da nossa comunidade.

Seminário Café Cultural

O Projeto Pedagógico do Curso de Matemática da Universidade Federal da Bahia estabelece que os estudantes de graduação, tanto da Licenciatura como do Bacharelado, devem ter formação complementar em atividades de natureza acadêmica, cultural, artística, científica ou tecnológica, que possibilitem a complementação da formação humana e profissional, isto é tanto no âmbito do conhecimento em Matemática e em diferentes áreas do saber, como no âmbito de sua preparação humanística e cultural.

Nesta perspectiva, a fim de propiciar a participação em atividades que ampliem, enriqueçam e consolidem sua formação acadêmica, foi criado o Seminário Café Cultural, um ciclo de palestras de extrema relevância para a formação dos nossos alunos.

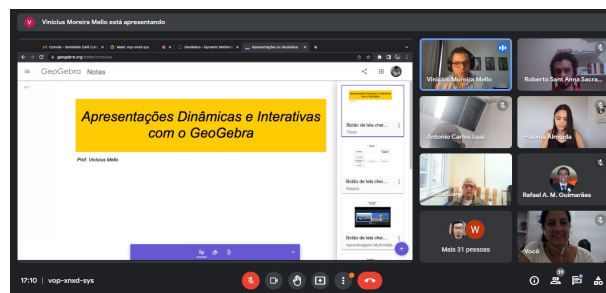


Figura 1: Palestra *online* do Prof. Vinícius Mello (UFBA).

O Café Cultural contribui na formação geral complementar dos alunos da graduação em Matemática das instituições de ensino superior na cidade de Salvador e região metropolitana envolvendo outros campos de conhecimentos necessários além da matemática. As palestras do Café Cultural visam oferecer aos participantes um ambiente propício para cobrir estas necessidades. Além disso, pretende-se atender os princípios de flexibilidade e de atualização, e potencializar os conhecimentos acadêmicos, estimulando os estudantes a participarem de projetos de iniciação científica, de ensino e de extensão.

O Café Cultural é um ciclo de palestras distribuídas no decorrer do ano. Tem acontecido em edições anteriores, destacando o período de 2016-2018 sob a coordenação da professora Simone Moraes, e desde abril de 2019 sob a coordenação dos professores Cristina Lizana e Roberto Sant'Anna. O seminário acontece pelo menos uma vez por mês, geralmente nas quintas-feiras, no Auditório do Instituto de Matemática, das 16h40 às 18h30.



Figura 2: Mesa redonda “Mulheres na Matemática: um olhar para o passado e o futuro”, primeiro evento presencial após dois anos *online*.



Figura 3: Mesa redonda “Torneio Meninas na Matemática”.

No período de pandemia, o seminário foi realizado em formato *online*, permitindo a participação de palestrantes e público de diversos lugares. Após o retorno às atividades presenciais, o Café Cultural manteve um formato híbrido, sendo realizadas atividades presenciais com transmissão ao vivo pelo canal de YouTube do Departamento de Matemática, evidenciando o caráter extensionista deste seminário. Cada palestra confere ao participante um certificado com uma carga horária de três horas em Atividades Complementares.

No ano de 2022, contamos com as mais diversas atividades *online* e/ou presenciais. Dentre os palestrantes podemos citar a participação dos professores Vinícius Mello (Fig. 1), Carlos Bahiano (Fig. 5), Vítor Araújo (Fig. 4), do DMAT - UFBA, e do professor Henrique Antunes do Departamento de Filosofia da UFBA. Ademais, contamos com duas mesas redondas para compartilhar experiências no intuito de incentivar meninas e mulheres a estudarem matemática: “**Mulheres na Matemática: um olhar para o passado e o futuro**” (Fig. 2), com as professoras Már-

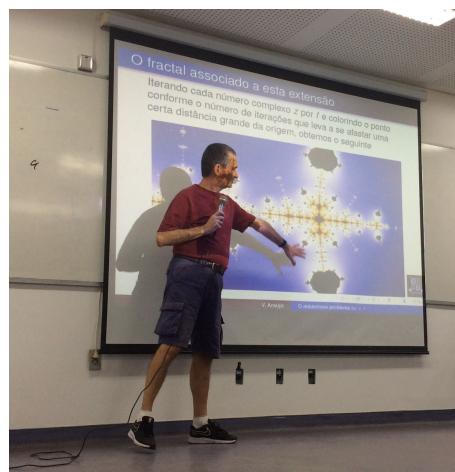


Figura 4: Palestra do Prof. Vítor Araújo (UFBA).

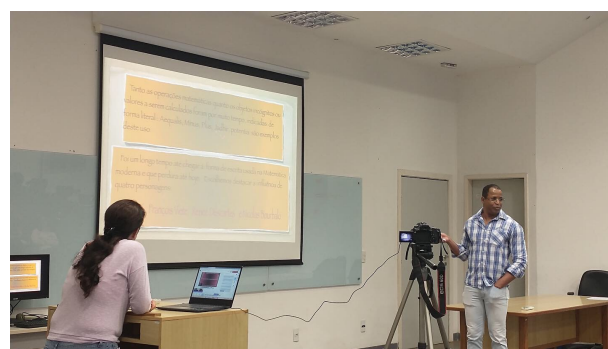


Figura 5: Palestra do Prof. Carlos Bahiano (UFBA).

cia Barbosa de Menezes (DMAT-UFBA) e Maria Cristina Elyote Marques Santos (Projeto “Elas nas Exatas” UNEB), e “**Torneio Meninas na Matemática**” (Fig. 3), com a professora Ana Paula Chaves (UFG) e as medalhistas de olimpíadas de Matemática Larissa Lemos Afonso e Cecília Mileski de Paula. Além disso, tivemos uma atividade especial com a psicóloga Luana Machado para falar sobre a ansiedade, explicando a sua funcionalidade e desconstruindo tabus que atrapalham a forma como lidamos com essa emoção, ensinando práticas de manejo dessa emoção da terapia cognitiva comportamental, de forma breve e prática.

Para mais informações sobre o Café Cultural podem visitar o site <http://cafeculturaldmat.ime.ufba.br/> e assistir os eventos anteriores no canal de YouTube do DMAT <https://www.youtube.com/@depmatufba>.

Seminário ICmat

O Seminário ICmat nasce por iniciativa do programa de Pós-Graduação em Matemática da UFBA. É um seminário público e aberto a todos os estudantes da UFBA, assim como de outras instituições, que este-

jam interessados em temas abordados nos projetos de iniciação científica, propostos pelos professores do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da UFBA.

A Iniciação Científica (IC) é uma excelente oportunidade para todos os alunos da graduação, mesmo que não pretendam ser pesquisadores. A iniciação permite despertar a vocação científica e incentivar novos talentos, assim como desenvolver habilidades que podem ser úteis em qualquer atividade profissional futura. Participar em projetos de iniciação científica estimula o desenvolvimento do pensamento científico e da criatividade, e será de muita ajuda para quem deseja continuar na vida acadêmica e realizar estudos de pós-graduação (mestrado e/ou doutorado).



Figura 6: Divulgação de palestra realizada pelo discente Eldon Barros (UFBA).

Quem tiver interesse em fazer um projeto de IC, deve entrar em contato com algum professor da sua universidade, não precisa ser feita na mesma unidade onde estuda. É aconselhável que procurem professores que fazem parte dos programas de pós-graduação. Além de ser uma oportunidade para aprender assuntos novos, existe a possibilidade de conseguir bolsas de IC.

O Seminário ICmat, organizado no ano de 2022 pelos professores Diego Catalano Ferraioli, Dirk Erhard e Thiago Bomfim, tem o objetivo de oferecer um espaço para interagir entre aqueles que participam de projetos de IC relacionados a Matemática e os demais estudantes da graduação, divulgando os trabalhos realizados por cada estudante, estimulando uma troca de experiências e promovendo um maior amadurecimento científico dos participantes.

No período 2022.1 foram realizadas 10 palestras por discentes envolvidos em projetos de IC vinculados a projetos de professores do DMAT. Para mais detalhes, podem visitar o site <http://dgmp.mat.ufba.br/ICmat/seminarioICmat.html>.

[br/ICmat/seminarioICmat.html](https://icmat/seminarioICmat.html) e ver os resumos de projetos de outros discentes que podem chamar a sua atenção. Se você tiver interesse, pode visitar o site da Pós-graduação em Matemática e ver a lista dos docentes e áreas de pesquisa <https://pgmat.ufba.br/>. Para mais informação sobre o PIBIC acesse o site <https://pibic.ufba.br/>.

Dinâmica Arretada

O Dinâmica Arretada é um seminário interinstitucional de Sistemas Dinâmicos, Teoria Ergódica e áreas afins de universidades do Nordeste, que visa contribuir na integração e consolidação da comunidade dinamicista da região Nordeste do Brasil.

O comitê organizador do Dinâmica Arretada é conformado pelos professores Carlos Bocker (UFPB), Cristina Lizana (UFBA), Davi Lima (UFAL), Ítalo Dowell (UFPI), Maurício Poletti (UFC), Ricardo Bortolotti (UFPE), Vanessa Ramos (UFMA), Vilton Pinheiro (UFBA), Wagner Ranter (UFAL), e Yuri Lima (UFC).

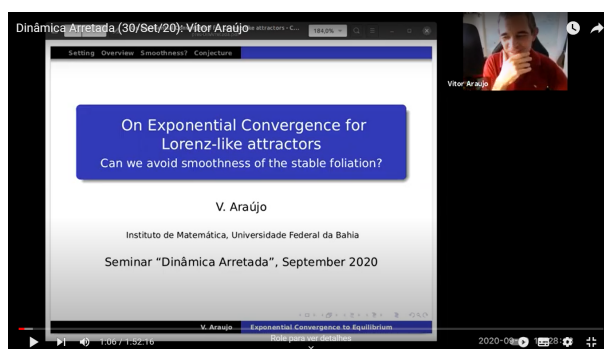


Figura 7: Primeira palestra do Dinâmica Arretada ministrada pelo Prof. Vítor Araújo (UFBA).

O seminário surgiu como uma iniciativa para integrar os pesquisadores em Sistemas Dinâmicos da região Nordeste, o primeiro encontro tendo ocorrido no dia 30 de setembro de 2020. O evento é realizado na última quarta-feira de cada mês em formato *online*, o que facilita a participação de pesquisadores e alunos de diversas instituições e lugares, com uma participação média por evento de 20–30 pessoas. Em pouco mais de dois anos que tem o Dinâmica Arretada, tem sido realizados mais de 19 palestras com diversos pesquisadores, tanto jovens como mais experientes, e dando especial atenção à regionalidade e subrepresentatividade de gênero, contando também com convidados internacionais renomados.

Para mais detalhes sobre os eventos passados podem visitar o site <https://sites.google.com/view/dinamicaarretada> e o canal de You-

Tube https://www.youtube.com/channel/UC_7Mtw6P8aAz5SlKqEmowSQ, onde são mantidas as gravações das palestras.

Seminário Internacional de Matemática

A grande proliferação de seminários e eventos de matemática em inglês, tem limitado o crescimento e fortalecimento de seminários em espanhol e português a nível internacional, o que tem ocasionado que muitos alunos nos países latino-americanos que não falam inglês fiquem em desvantagem no acesso a palestras com pesquisadores internacionais. Além disso, pela crise causada pela pandemia, os seminários presenciais foram cancelados ao longo dos anos 2020 e 2021, e passaram a ser realizados em formato *online*, muitas vezes dando preferência ao inglês, ao invés de dar prioridade aos idiomas falados na grande maioria dos países no continente americano.

Visando dar apoio frente à necessidade da comunidade matemática latino-americana, os professores Tomás Guardia, Universidade Gonzaga nos Estados Unidos, e Cristina Lizana, Universidade Federal da Bahia no Brasil, organizaram um seminário com caráter internacional, com o objetivo de criar um espaço de encontro e interação entre os matemáticos de diversos países latino-americanos, tendo destaque a participação de matemáticos do Brasil, Venezuela, Estados Unidos e outros países da região.

Assim, as palestras do Seminário Internacional de Matemática visam oferecer aos participantes um ambiente propício para a integração e consolidação da comunidade matemática Latinoamericana, e dar visibilidade aos seminários em espanhol e português principalmente.

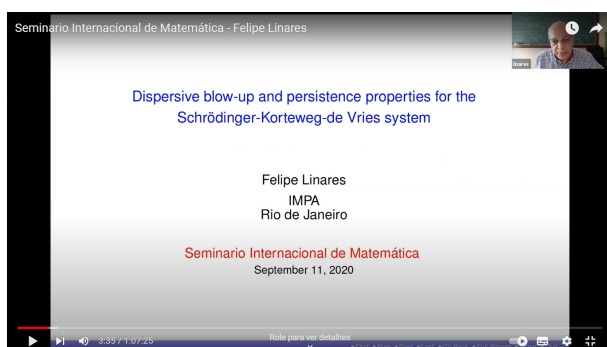


Figura 8: Primeira palestra do Seminário Internacional de Matemática ministrada pelo Prof. Felipe Linares (IMPA).

Esse seminário teve início em setembro de 2020.

No período de pouco mais de dois anos, foram realizadas mais de 41 palestras, em mais de 13 áreas distintas da matemática com convidados dos mais diversos países e instituições. O evento é realizado nas sextas-feiras, atualmente com frequência quinzenal, no formato *online*, o que tem facilitado a participação de palestrantes convidados de mais de 30 instituições diferentes, localizadas em mais de 10 países distintos, em distintos continentes, assim como a participação de matemáticos das mais diversas nacionalidades localizados em distintos lugares do mundo. A participação média por evento é de 20–30 pessoas.

Para mais sobre o Seminário Internacional de Matemática basta acessar o site <https://sites.google.com/view/semintmat/> e o canal de YouTube <https://www.youtube.com/@seminariointmat2020>, onde são mantidas as gravações das palestras anteriores.

OBMEP-2022

A OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) é um projeto nacional dirigido às escolas públicas (e privadas) brasileiras e possui uma sede regional em Salvador, abrangendo 9 municípios da região metropolitana. O Prof. Roberto Sant’Anna, do IME - UFBA é coordenador regional da OBMEP nesses municípios.



Figura 9: Na foto: o diretor do Instituto de Matemática e Estatística - UFBA, Prof. Evandro dos Santos; o coordenador regional da OBMEP, Prof. Roberto Sant’Anna

No ano de 2022, mais de 540 escolas de ensino fundamental e médio participaram da competição, resultando num engajamento de quase 10 mil estudantes, em sua maioria, da rede pública, que foram classificados para as provas de 2ª fase. Isso resultou num

total de 58 estudantes medalhistas das escolas públicas, incluindo ouro, prata e bronze. Os medalhistas de ouro participarão da Cerimônia de Premiação Nacional, com direito a viagem de avião e hospedagem em hotel. As provas da OBMEP são realizadas em diversos colégios dos municípios envolvidos, mesmo alguns de difícil acesso, em zona rural, ou até colégios de unidades prisionais. Além disso, uma quantidade cada vez maior de estudantes com algum tipo de deficiência visual tem tido a oportunidade de participar das provas. Dessa forma, vemos como esse projeto tem trazido inclusão social e contribuído para melhorar a vida de milhares de estudantes, não apenas na Bahia, mas também por todo o Brasil, razão pela qual a UFBA tem dado total apoio e incentivado a realização das atividades relacionadas com a OBMEP, muitas das quais ocorrem dentro dos muros da própria Universidade.



Figura 10: Cerimônia de Premiação Regional da OBMEP, edição 16^a, realizada em 1 de dezembro de 2022, no Auditório A do PAF I no Campus de Ondina da UFBA.

Tradicionalmente, a OBMEP atende estudantes do 6^o ano do Ensino Fundamental ao 3^a série do Ensino Médio. Entretanto, em 2022 o certame ampliou o seu campo de atuação, vindo a englobar também os estudantes do 2^o ao 5^o ano do Ensino Fundamental, por meio da OBMEP Mirim, a qual teve então a sua primeira edição. Mais de 70 escolas participaram nos 9 municípios da Regional BA01, e a reação por parte dos estudantes foi muito receptiva. O coordenador Roberto Sant'Anna participou recentemente de uma das Cerimônias de Premiação da OBMEP Mirim, dessa vez, ocorrida em Madre de Deus, e pôde ver de perto o entusiasmo nos rostos dos pequenos estudantes, os quais certamente possuem um futuro brilhante pela frente.

Encontro de Matemática - EMAT

O Encontro de Matemática da UFBA (EMAT) é um evento tradicionalmente organizado pelos estudantes dos cursos de graduação em Matemática da UFBA, com o apoio do corpo diretor do Instituto de Matemática e Estatística da UFBA (IME), do Departamento de Matemática (DMAT) e do Colegiado de Matemática (COLMAT).

Caracterizado pela integração entre graduandos, professores, ex-alunos e colegas de outras instituições, o Encontro, com 17 edições já realizadas, notabiliza-se pela qualidade e diversidade do conteúdo apresentado, visando enriquecer o conhecimento dos participantes, com a abordagem de temas pouco presentes no currículo acadêmico, discutir as perspectivas para o futuro de um licenciado ou bacharel em Matemática, entre outros temas.

Com sede no IME, o evento passou por um hiato de 6 anos, desde a sua 14^a edição, vindo a retornar em 2018, sob estímulo dos professores do IME, para que houvesse o envolvimento dos alunos na organização. A atuação de estudantes como Jemima Sena e Raphael Dantas (hoje já formados) nesse período foi de fundamental importância para que o Encontro voltasse a ser realizado.

O EMAT tipicamente conta com palestras, minicursos, apresentações orais e de pôsteres, mesas redondas, além de proporcionar a visita de membros da comunidade externa para o ambiente da Universidade.



Figura 11: Cerimônia de abertura da XVII EMAT, realizada em 26 de setembro de 2022 no Auditório do IME no Campus de Ondina da UFBA.

Durante a realização do XVII Encontro de Matemática, que ocorreu em setembro de 2022, foi realizada a visita de estudantes de escolas públicas ao IME. Na ocasião, os estudantes participaram de exposições do Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística da UFBA (LEMA), coordenadas pelas professoras Cristiana Valente (DMAT) e Denise Viola (DEST) e também

participaram de atividades da Olimpíada Brasileira de Matemática para as Escolas Públicas (OBMEP), proporcionadas pelos professores Otávio Menezes, Roberto Sant'Anna e Samuel Feitosa. Ao todo, mais de 160 estudantes visitaram as instalações do IME na ocasião.

Esse tipo de ação é muito importante pois a Universidade, enquanto instituição pública e social, está abrindo suas portas para tocar a comunidade externa, com ações visando a melhoria do ensino e a motivação individual dos alunos para os estudos. Por um lado, isto contribui para melhorar a perspectiva da sociedade com respeito à Universidade, o que é particularmente útil em momentos de desgaste da estrutura da educação pública. Por outro lado, visitas como essas demonstram ter um efeito motivador e inspirador nos jovens estudantes, permitindo a eles descobrir novas possibilidades (acadêmicas) que nunca imaginaram antes, haja vista que para muitos deles a Universidade Pública nem é vista como uma opção para o futuro.

Professores de Matemática da rede básica de Salvador, e também de alguns municípios da região metropolitana, têm demonstrado crescente interesse em participar juntamente com seus alunos de ações desse tipo e estreitar o contato deles com o ambiente da Universidade. Espera-se que em futuras edições do Encontro a participação deles se amplie e seja mais evidente.

É possível obter mais informações sobre o EMAT e se manter atualizado sobre as próximas edições acessando o site <http://www.encontrodematematica.ime.ufba.br/> ou acessando a conta no Instagram [@encontromatematicaufba](https://www.instagram.com/encontromatematicaufba).

Encontro Conjunto Brasil-Portugal em Matemática

Cooperação e colaboração são elementos fundamentais para pesquisadores de qualquer área e, principalmente quando se trata de matemática, ter uma rede de contatos e de discussões é essencial para o desenvolvimento e aprimoramento de trabalhos, sejam teóricos ou aplicados. Com isso em mente, o Encontro Conjunto Brasil-Portugal em Matemática teve sua edição de 2022 sediada em Salvador, a primeira capital do Brasil, no campus da UFBA em Ondina.

O evento contou com mais de 200 inscritos e com a programação de plenárias de pesquisadores de ambos países, incluindo uma sessão especial de Artur Ávila, medalhista Fields em 2014. Foram ainda realizadas mais de duas dezenas de sessões temáticas e



apresentação de pôsteres.

Mais informações sobre o Encontro Conjunto Brasil-Portugal em Matemática acesse o site <https://sites.google.com/view/ecbpm/>.

XX Encontro Brasileiro de Lógica

O Encontro Brasileiro de Lógica (EBL) é o principal evento de divulgação promovido pela Sociedade Brasileira de Lógica (SBL) e sua vigésima edição foi sediada na UFBA, na cidade de Salvador, entre os dias 12 a 16 de Setembro de 2022.

O EBL congrega pesquisadores de diferentes áreas de atuação da lógica e representa uma importante reunião para a comunidade do Brasil e de toda América Latina. Fundamentos da Computação Científica, Inteligência Artificial, Lógica Algébrica, Lógica Clássica e Não-Clássica, Lógica Filosófica e Teoria de Conjuntos são exemplos de tópicos discutidos durante o Encontro.

O encontro ainda conteve a Escola de Lógica (Logic School), com minicursos oferecidos com intuito de apresentar tópicos para alunos de graduação e mestrado que tenham interesse em estudar lógica, e também o Primeiro Workshop de Lógica para Alunos do Ensino Fundamental (I WOLF) que, associado ao curso de Onda Digital do Instituto de Computação da UFBA, visa estimular o pensamento lógico e crítico a partir da lógica de argumentos para estudantes com idades entre 13 e 15 anos.



Para maiores detalhes sobre o XX EBL ou sobre a SBL, o leitor pode acessar os sites <https://eb12021.ufba.br/index.html> e <http://sbl.org.br/>, respectivamente.

Verão 2023 - Semanas Temáticas

Ah, o verão! Uma época ótima para pegar um sol, curtir uma viagem e, claro, aprender matemática! Os cursos de verão são eventos esperados de diversos cursos de pós-graduação do Brasil e não poderia ser diferente no Instituto de Matemática e Estatística (IME) da UFBA.

O tradicional evento possui mais de 35 edições e na edição de 2023 foram oferecidas disciplinas a nível de mestrado e doutorado e foram organizadas semanas temáticas pelos grupos de pesquisa do IME. Conforme implementado durante a pandemia de COVID-19, as disciplinas ofertadas foram de caráter *online*, o que encoraja a participação de estudantes de diversos estados do Brasil, adicionando diversos temperos à mistura.



**PROGRAMA DE VERÃO
PGMAT UFBA - 2023**

Salvador, de 03 de janeiro até 03 de março

Semanas Temáticas

- Álgebra e Topologia Algébrica
- Equações Diferenciais Parciais
- Geometria Diferencial
- Lógica Matemática
- Sistemas Dinâmicos

Disciplinas

Mestrado

- Álgebra Linear
- Teoria da Medida
- Métodos Estatísticos

Doutorado

- Análise Funcional



Inscrições - 01 de novembro até 12 de dezembro de 2022
www.verao.ime.ufba.br verao.ime@ufba.br

COMISSÃO ORGANIZADORA

- Jaime Leonardo Orjuela Chamorro (DMAT-IME)
- Otávio de Macedo Menezes (DMAT-IME)
- Roberto Freitas Parente (DCI-IC)
- Carlos Alberto Raposo da Cunha (DMAT-IME)



As semanas temáticas tiveram espaço nas instalações do IME, em Salvador-BA, e dispuseram de palestras contemplando as áreas de Equações Diferenciais Parciais, Sistemas Dinâmicos, Lógica, Topologia e Teoria dos Conjuntos, Álgebra e Topologia Algébrica, e Geometria Diferencial e Física Matemática. Algumas semanas temáticas ainda contaram com a realização de minicursos oferecidos por professores da UFBA e de outras instituições.

O Programa de Verão do IME-UFBA tem a página da internet <http://verao.ime.ufba.br/>. Edições passadas também podem ser acessadas pelo website, bem como às informações sobre o Verão 2024, quando estiver próximo! Mais informações sobre a Programa de Pós-graduação em Matemática da UFBA podem ser encontradas em <https://pgmat.ufba.br/>.

PAPIC

O Programa de Apoio a Projetos e Iniciação Científica em Matemática professora Eliza Maria Ferreira Veras da Silva (PAPIC) é uma iniciativa a fim de financiar projetos de Educação Básica e de Iniciação Científica que utilizam da Matemática como aliada na luta antirracista. O Programa é coordenado pelas professoras Manuela da Silva Souza (IME/UFBA) e Simone Maria de Moraes (IME/UFBA) e também pelos professores Carlos Eduardo Nogueira Bahiano (IME/UFBA), Elen Deise Assis Barbosa (IME/UFBA) e Evandro Carlos Ferreira dos Santos (IME/UFBA) e pela professora Andreia Maria Pereira de Oliveira da Faculdade de Educação (FACED).



O financiamento do projeto faz parte do programa de incentivo à pesquisa do Instituto Serrapilheira garantido ao professor Dirk Erhard (IME/UFBA). A professora Eliza Maria Ferreira Veras da Silva foi a primeira docente do, na época, Instituto de Matemática da UFBA a concluir o doutorado e é também considerada a primeira mulher negra brasileira a obter o título de doutora em Matemática.

O programa teve seu primeiro edital encerrado em outubro de 2022, os projetos financiados iniciaram em março deste ano com vigência de doze meses. O edital para o ano de 2023 encerrou suas inscrições no dia 10 de março de 2023 e os projetos tiveram início em abril.

Informações sobre o programa, resultados e editais podem ser obtidos no site <https://papicelizaferreira.ufba.br/>.

Workshop Nordestino de Sistemas Dinâmicos

O **Workshop Nordestino de Sistemas Dinâmicos** é um evento científico na área de Sistemas Dinâmicos, mais especificamente com foco em hiperbolicidade não-uniforme, hiperbolicidade parcial, sistemas robustamente transitivos, expoentes de Lyapunov, me-



didadas de máxima entropia, renormalização, formalismo termodinâmico, fluxos geodésicos e bilhares.

O evento ocorreu em formato totalmente presencial na Universidade Federal da Bahia em Salvador-BA no período de 28 a 30 de junho de 2023. O workshop contou com 12 palestras com duração aproximada de 50 minutos cada, distribuídas em 3 dias. Tivemos convidados de diversas instituições a nível nacional, pesquisadores renomados a nível internacional na área e também jovens pesquisadores da área. O evento visou fortalecer o polo de Sistemas Dinâmicos na região Nordeste do Brasil. Teve entre as palestras momentos para discussão sobre os temas apresentados entre os participantes do evento, assim como uma sessão de pôster para divulgação dos trabalhos de alunos de pós-graduação, incentivando a interação entre alunos e pesquisadores e fomentando a geração de novos projetos.

O evento faz parte das atividades planejadas no marco físico vinculado ao projeto “Pesquisa integrada em Sistemas Dinâmicos na Bahia e Ceará”, projeto 406750/2021-1 financiado por CNPq/MCTI/FNDCT pelo período 03/02/2022 a 28/02/2025, e contou com o apoio financeiro do INCTMat.

Para mais informações sobre o Workshop Nordeste de Sistemas Dinâmicos, e outras atividades do Grupo de Pesquisas de Sistemas Dinâmicos da UFBA, basta acessar o site <https://sites.google.com/view/dynamicalsystemsufba/workshop-nordestino-de-sistemas-dinamicos>.



Cristina Lizana é venezuelana, com graduação e mestrado em Matemática pela Universidad de Los Andes-ULA (Venezuela), e doutorado em Matemática pelo IMPA (Brasil). Foi professora da ULA(2004-2017) e trabalha na UFBA desde 2018. Pesquisa na área de Sistemas Dinâmicos, atuando principalmente em Dinâmica Parcialmente Hiperbólica e mapas robustamente transitivos. O seu hobby é a fotografia e a estreita relação desta com a matemática.



Henrique da Costa é mineiro, cursou graduação e pós-graduação no ICMC-USP em São Carlos, interior de São Paulo, e está na UFBA em Salvador desde 2016. Atua na área de pesquisa em análise, mais precisamente sistemas dinâmicos não-lineares e equações diferenciais parciais. Estuda piano e jogos de cartas e tabuleiro como hobby. Foi cabeludo durante a pandemia, no entanto não se atreveu a ser padeiro.



Roberto Sant'Anna é nascido e criado em Salvador, Bahia. É doutor em Matemática Pura pela UFBA e atualmente é professor adjunto no Instituto de Matemática Estatística da UFBA e também Coordenador Regional da OBMEP. Tem realizado pesquisas na temática de Otimização Ergódica, dentro da área de Sistemas Dinâmicos e também tem atuado em diversos projetos tendo em vistas a divulgação da Matemática. Nas horas vagas, é amante da música e busca através dela se expressar por meio do teclado ou piano, instrumentos que tanto admira.

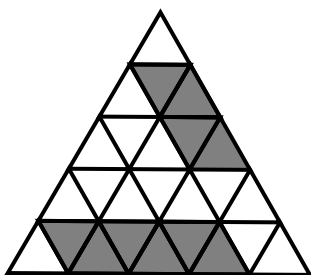
PROBLEMA

Contando Paralelogramos e Outros Problemas

Ao contrário de outras áreas da atividade humana, um PROBLEMA em Matemática pode ser uma fonte de diversão. Nesta seção, convidamos os leitores a pensarem em alguns problemas, de variados níveis de dificuldade, e a enviarem suas soluções para serem publicadas nas próximas edições.

Problemas Universitários

Problema 1. Uma malha triangular é formada pela decomposição de um triângulo equilátero de lado 5 em 5^2 triângulos equiláteros de lado 1, como indicado na figura. Determine o número de paralelogramos que podem ser desenhados por segmentos que formam a malha.



Problema 2. Determine a quantidade de números reais x que satisfazem a equação:

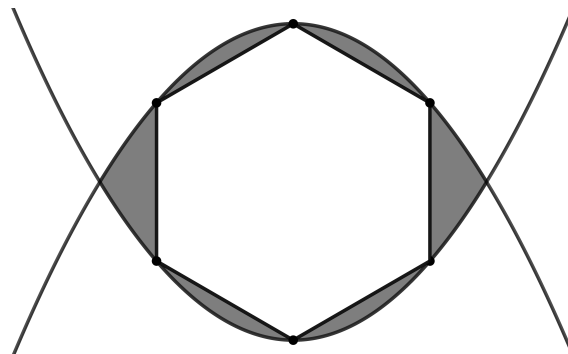
$$2^{x^2+x} + \log_2 x = 2^{x+1}.$$

Problema 3. Seja a um inteiro positivo tal que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{25} = \frac{a}{25!}.$$

Encontre o resto de a na divisão por 13.

Problema 4. Um hexágono regular de lado 1 está inscrito na interseção de duas parábolas idênticas, mas que estão orientadas em direções opostas, i.e., uma é simétrica a outra em relação à reta que passa pelos seus pontos de interseção. Encontre a área da região sombreada, ou seja, a área que está entre as parábolas, mas que é externa ao hexágono.



Problema 5. Calcule o valor da soma

$$S = \sum_{k=1}^{2022} (-1)^k \cdot \frac{(k^2 + k + 1)}{k!}.$$

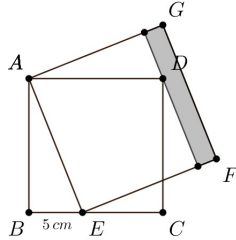
Problema 6. Sejam a e b números reais com $a < b$ e sejam $f, g : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ funções contínuas tais que $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, mas $f \neq g$. Defina

$$I_n = \int_a^b \frac{(f(x))^{n+1}}{(g(x))^n} dx, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que a sequência $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

Problemas de Matemática Elementar

Problema 7. Na figura a seguir, $ABCD$ e $AEFG$ são quadrados. O segmento BE mede 5 cm . Encontre a área do retângulo sombreado.



Caso queira compartilhar sua solução de alguns dos problemas acima com nossos leitores, envie uma mensagem com o seu texto e nome completo para hipatia@ufba.br.

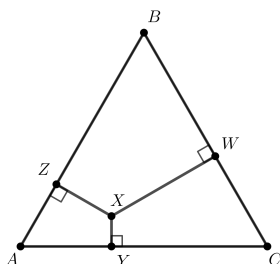
Problema 8. Na figura a seguir, cada quadradinho representa uma cadeira. Note que as quantidades de cadeiras consecutivas de uma mesma cor correspondem apenas aos números 1 e 3, que são ímpares.



De quantas maneiras podemos colocar 12 cadeiras em fila, cada uma sendo da cor branca ou cinza, de tal modo que as quantidades de cadeiras consecutivas pintadas de uma mesma cor sejam sempre números ímpares?

Problema 9. Na figura a seguir, X é um ponto no interior do triângulo equilátero ABC e Y , W e Z são os pés das perpendiculares de X aos lados AC , BC e AB , respectivamente.

- Se $XY = k$, $XZ = 2k$, $XW = 4k$ e a área do quadrilátero $AYXZ$ é 13 cm^2 , encontre a área do triângulo ABC .
- Se $XY = ak$, $XZ = bk$ e $XW = ck$, encontre a razão entre as áreas do triângulo ABC e do quadrilátero $AYXZ$.



(Página intencionalmente deixada em branco.)

CÓLOFON

Esta edição contou com a colaboração dos seguintes alunos:



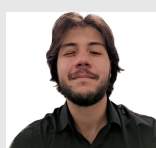
Amanda dos Santos Braga é ilustradora, graduanda em Design pela Escola de Belas Artes (UFBA) e atualmente é estagiária do NEX-IME. Sua área de interesse é *branding*, editorial e *slow design*.



Eldon Barros dos Reis Júnior é graduando em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (UFBA) e atua como bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) na área de Probabilidade com o projeto “Método da Entropia Relativa e q -Entropia”.



Helena Beatriz Jesus Gomes é graduanda em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (UFBA). É membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática e Educação Matemática Inclusiva (UFCG). Sua área de interesse é Educação Matemática Inclusiva e Tecnologia no Ensino de Matemática.



Pedro Henrique Bitencourt é graduando em Design pela UFBA. Ex-aluno de Estatística pela UFBA, atualmente é estagiário do IME, responsável pela redes sociais do DEST. Área de estudo em identidade visual, arte publicitária e arte para tatuagem.



Taíse Lara de Souza Jorge é licenciada em Matemática pela UFBA e mestranda em Educação pela UFFS. Realiza pesquisa na área de Mediação Pedagógica e Alfabetização Matemática sob a perspectiva do Numeramento, amparada na Educação Crítica e Educação Matemática Crítica.



