TÉCNICA

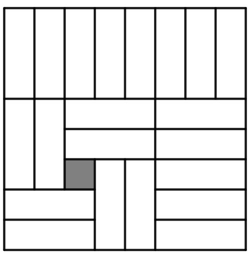
Números Complexos em Combinatória

Samuel Feitosa

Um problema de motivação

O leitor já deve ter se deparado alguma vez com problemas recreativos, mais popularmente conhecidos como *Puzzles* ou Quebra-cabeças, que contêm alguma pergunta divertida cuja solução depende de algum argumento matemático ou do emprego de alguma TÉCNICA inusitada. Esse é o propósito do exercício a seguir.

Exercício 1. *Um triminó é um retângulo* 3×1. *Um monominó é um único quadrado* 1×1. *Quais as possíveis posições de um monominó em uma cobertura de um tabuleiro* 8×8 *usando 21 triminós e 1 monominó?*



Convidamos o leitor a tentar resolvê-lo antes de continuar a ler nas próximas linhas a solução (inesperada) que envolverá números complexos.

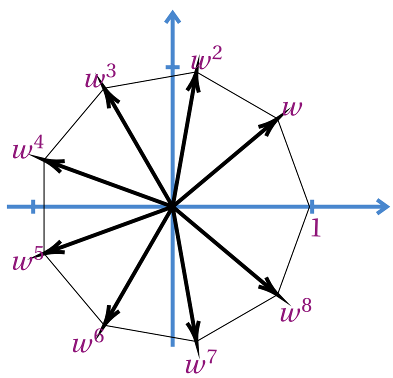
Preliminares

Dado um n inteiro positivo, uma *raiz n-ésima da unidade* é qualquer número complexo w que satisfaz a equação

$$x^n = 1. \tag{1}$$

Um desses números é $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$ e qualquer outro que também satisfaz a equação é uma de suas potências:

$$w^2, w^3, w^4, \dots$$



Essas potências são os vértices de um polígono regular de n lados com centro na origem. Existe uma estrutura algébrica atrelada às raízes de (1) que cria uma importante conexão com fenômenos de contagem. A primeira parte dessa estrutura é que o produto de quaisquer duas raízes também é uma raiz. De fato, se $x_1^n = 1$ e $x_2^n = 1$, então $(x_1x_2)^n = 1$. A segunda parte é que o inverso de uma raiz também é uma raiz, pois se $x^n = 1$ então $(1/x)^n = 1$. A tabela a seguir é um exemplo de *tabuada* multiplicativa das raízes cúbicas da unidade, i.e., das raízes de $x^3 = 1$. Note que $w^3 = w^0 = 1$.

Vejamos um exercício envolvendo uma raiz quarta da unidade e números binomiais.

$\times$	w^0	w^1	w^2
w^0	w^0	w^1	w^2
w^1	w^1	w^2	w^0
w^2	w^2	w^0	w^1

Exercício 2. *(ITA) Para cada n, temos que*

$$1-\binom{4n}{2}+\binom{4n}{4}-\ldots-\binom{4n}{4n-2}+1$$

é igual a:

a) $(-1)^n \cdot 2^{2n}$ *b)* 2^{2n} *c)* $(-1)^n \cdot 2^n$
d) $(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n}$ *e)* $(-1)^{n+1} \cdot 2^n$.

Solução. *Para calcular a soma dos números binomiais de índices pares ou ímpares, é conhecido o uso da soma $(1+1)^n+(1-1)^n$. Como $i^2=-1$, para encontrar a soma alternada descrita no problema, calculemos*

$$\begin{aligned}
(i+1)^{4n} &= \sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k} i^k\\
((i+1)^2)^{2n} &= \sum_{j=0}^{2n}\binom{4n}{2j} i^{2j}\\
&+ \sum_{j=0}^{2n-1}\binom{4n}{2j+1} i^{2j+1}\\
(2i)^{2n} &= \sum_{j=0}^{2n}\binom{4n}{2j}(-1)^j\\
&+ i\left(\sum_{j=0}^{2n-1}\binom{4n}{2j+1}(-1)^j\right).
\end{aligned}$$

Como $(2i)^{2n}=(-1)^n 2^{2n}$ é número real, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{2n}\binom{4n}{2j}(-1)^j &= (-1)^n 2^{2n} \text{ } e\\
\sum_{j=0}^{2n-1}\binom{4n}{2j+1}(-1)^j &= 0.
\end{aligned}$$

A resposta é a letra A.

Outra propriedade relevante sobre raízes n-ésimas da unidade é que a soma de todas elas é sempre zero. Para verificar isso, se $w=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n}$, então $w^n-1=0$ e daí

$$(w-1)(w^{n-1}+w^{n-2}+\ldots w+1)=0.$$

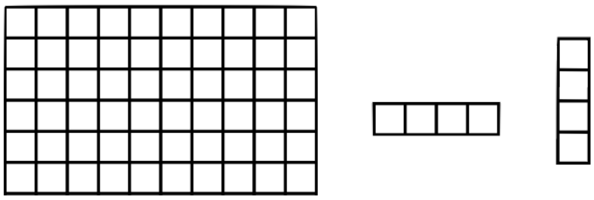
Como $w \neq 1$, temos

$$w^{n-1}+w^{n-2}+\ldots w+1=0.$$

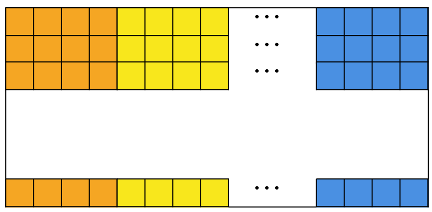
De forma mais geral, se $n \nmid k$, como $w^k \neq 1$, temos

$$\begin{aligned}
w^{k(n-1)}+w^{k(n-2)}+\ldots w^k+1 &= \frac{w^{nk}-1}{w^k-1}\\
&= \frac{1-1}{w^k-1}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Agora, vejamos uma aplicação real em um problema de combinatória. É possível cobrirmos um tabuleiro 6×10 com peças 1×4, que podem ser colocadas na vertical ou horizontal sem sobreposição?



Uma abordagem natural é contar o total de quadradinhos do tabuleiro, que é $6\cdot 10=60$, e notar que ele é múltiplo de 4. Assim, precisaríamos de $60/4=15$ peças 1×4 para cobrir. Infelizmente, apenas essa condição não é suficiente. Por exemplo, apesar de um tabuleiro 2×2 ter uma quantidade de quadradinhos múltiplo de 4, claramente não podemos cobri-lo com peças 1×4. Por outro lado, se uma das dimensões do tabuleiro for múltiplo de 4, é fácil imaginar uma cobertura: basta cobrir esse lado com peças enfileiradas e repetir essa configuração nas demais linhas ou colunas.



O próximo teorema responde essa pergunta em geral.

Teorema 1. *(Klarner) Sejam m,n,p inteiros positivos dados. Se podemos cobrir um tabuleiro $m\times n$ usando peças $1\times p$, sem sobras ou superposições de peças, então p divide m ou p divide n.*

Demonstração. Suponha que podemos cobrir o tabuleiro como se pede. Para que a peça caiba no tabuleiro, devemos ter $p\leq \max\{m,n\}$. Particione o tabuleiro em m linhas $1\times n$ e n colunas $1\times m$, numerando as linhas do mesmo de cima para baixo, de 1 a m, e as colunas da esquerda para a direita, de 1 a n (como em uma matriz $m\times n$). Em seguida escreva, na casa

ij do tabuleiro, o número complexo w^{i+j}, em que $w = \text{cis}\,\frac{2\pi}{p}$. A soma de todos os números escritos na linha i é

$$\begin{aligned} w^{i+1} + w^{i+2} + \ldots + w^{i+n} &= w^i(w + w^2 + \ldots + w^n) \\ &= w^{i+1} \cdot \frac{w^n - 1}{w - 1}. \end{aligned}$$

Somando agora para todas as linhas, podemos concluir que a soma dos números no tabuleiro é

$$\sum_{i=1}^{m} w^{i+1} \cdot \frac{w^n - 1}{w - 1} = w^2 \cdot \frac{w^n - 1}{w - 1} \cdot \frac{w^m - 1}{w - 1}.$$

Vamos calcular essa soma agora de outra maneira. Considere uma peça $1 \times p$ na horizontal ocupando as casas de entradas:

$$(i\,j), (i + 1\,j), (i + 2\,j) \ldots (i + p - 1\,j).$$

A soma dos números correspondentes a essas casas é

$$\begin{aligned} w^{i+j} + w^{i+1+j} + w^{i+2+j} + \ldots w^{i+p-1+j} &= \\ w^{i+j} \cdot (1 + w + \ldots + w^{p-1}) &= \\ w^{i+j} \cdot \frac{w^p - 1}{w - 1} &= \\ &= 0. \end{aligned}$$

O mesmo argumento se aplica quando a peça está na vertical. Assim, como o tabuleiro pode ser coberto, agrupando os números das casas pertencentes a uma mesma peça, podemos concluir que a soma total dos números do tabuleiro é 0. Ou seja,

$$w^2 \cdot \frac{w^n - 1}{w - 1} \cdot \frac{w^m - 1}{w - 1} = 0.$$

Para que isso ocorra, devemos ter $w^n - 1 = 0$ ou $w^m - 1 = 0$ e assim $p \mid n$ ou $p \mid m$. Para verificar que é sempre possível cobrir o tabuleiro quando uma de suas dimensões é divisível por p, basta imitar a figura anterior.

□

O próximo exercício é uma aplicação direta das ideias da demonstração anterior

Exercício 3. *(Olimpíada Russa) Encontre o menor inteiro n tal que um tabuleiro $n \times n$ pode ser particionado em subtabuleiros 40×40 e 49×49 de modo que ambos os tipos de quadrados estejam presentes na partição.*

Solução. *Assim como na solução anterior, vamos considerar uma numeração para as linhas e colunas do tabuleiro como em uma matriz $n \times n$ e associar a cada quadradinho $(i\,j)$ o número complexo $w^i \xi^j$, em que $w = \text{cis}\,\frac{2\pi}{40}$ e $\xi = \text{cis}\,\frac{2\pi}{49}$. A soma total dos números escritos no tabuleiro é*

$$\begin{aligned} (w^1 + w^2 + \ldots + w^n)(\xi^1 + \xi^2 + \ldots + \xi^n) &= \\ \frac{w(w^n - 1)}{w - 1} \cdot \frac{\xi(\xi^n - 1)}{\xi - 1}. \end{aligned}$$

De modo semelhante, se $(i\,j)$ é o quadradinho do canto superior esquerdo de um quadrado $k \times k$, então a soma de todos os números em seus quadradinhos é

$$\begin{aligned} (w^i + w^{i+1} + \ldots + w^{i+k-1})(\xi^j + \xi^{j+1} + \ldots + \xi^{j+k-1}) &= \\ \frac{w^i(w^k - 1)}{w - 1} \cdot \frac{\xi^j(\xi^k - 1)}{\xi - 1} &= \\ 0, \end{aligned}$$

pois se $k = 40$, então $w^k - 1 = 0$ e se $k = 49$ então $\xi^k - 1 = 0$. Portanto, caso seja possível tabuleiro com tais quadrados, a soma de todos os números escritos deve ser 0 e daí

$$\frac{w(w^n - 1)}{w - 1} \cdot \frac{\xi(\xi^n - 1}{\xi - 1} = 0.$$

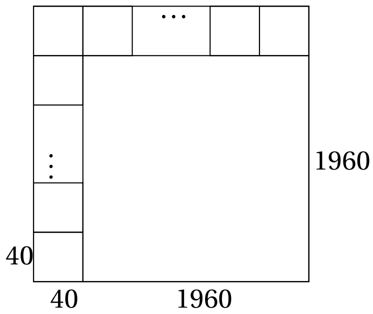
Se $w^n - 1 = 0$ temos $40 \mid n$ e se $\xi^n - 1 = 0$ temos $49 \mid n$. Para tratar desses dois casos, sejam a e b as quantidades de quadrados de tamanhos 40×40 e 49×49 usados na cobertura, respectivamente. Assim, considerando o total de quadrados cobertos, temos

$$n^2 = a \cdot 40^2 + b \cdot 49^2.$$

i) Se $40 \mid n$, temos que $40^2 \mid b \cdot 49^2$, e como $mdc(40, 49) = 1$, segue que $40^2 \mid b$. Assim, como a e b são positivos, podemos estimar

$$\begin{aligned} n^2 &= a \cdot 40^2 + b \cdot 49^2 \\ &> 40^2 \cdot 49^2 \\ &= (40 \cdot 49)^2. \end{aligned}$$

Daí, n é pelo menos $40 \cdot 50 = 2000$. Para mostrar que é possível cobrir um tabuleiro 2000×2000 com tais peças, cubra a borda esquerda e superior com quadrados 40×40 como na figura a seguir.



Para cobrir o restante da região, que é um quadrado de lado $1960 = 40 \cdot 49$*, crie* 40 *linhas e* 40 *colunas com espaçamento de* 49 *quadradinhos e cubra com* 40^2 *quadrados de lado* 49.

ii) *Se* $49 \mid n$*, de modo semelhante ao caso anterior,* $49^2 \mid a$ *e daí* $n \geq 49 \cdot 41 = 2009 > 2000$.

Considerando ambos os casos, o menor valor possível para n *é* 2000.

O próximo exercício ilustra a técnica de associarmos *funções geradoras* a problemas de contagem.

Exercício 4. *(Olimpíada Chinesa) Encontre o número de subconjuntos de* $\{1,2,3\ldots,2000\}$ *tais que a soma dos elementos é divisível por* 5.

Solução. *Antes de resolver o exercício proposto, considere um enunciado mais simples em que queremos apenas contar quantos subconjuntos de* $\{1,2,3\}$ *possuem soma de seus elementos igual a* 3. *Um solução seria listar explicitamente todos os* 8 *subconjuntos e calcular para cada um deles a soma de seus elementos:*

$$\begin{array}{rcl} \emptyset & \to & 0 \\ \{1\} & \to & 1 \\ \{2\} & \to & 2 \\ \{3\} & \to & 3 \\ \{1,2\} & \to & 3 \\ \{1,3\} & \to & 4 \\ \{2,3\} & \to & 5 \\ \{1,2,3\} & \to & 6 \end{array}$$

Considere agora o polinômio

$$\begin{aligned} p_3(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \\ &= x^6+x^5+x^4+2x^3+x^2+x+1. \end{aligned}$$

Para obter a expressão da última linha, utilizamos a propriedade distributiva. Note que cada monômio de $p_3(x)$ *pode ser associado a um subjunto de* $\{1,2,3\}$. *Por exemplo, o monômio* x^4 *surge através do produto* $x^1 \cdot 1 \cdot x^3$*, que pode ser interpretado da seguinte forma: no primeiro parênteses escolhemos* x^1*, no segundo não escolhemos* x^2 *e no terceiro escolhemos* x^3. *Essas escolhas podem ser associadas ao subconjunto* $\{1,3\}$. *Note que, associadas ao mesmo monômio* x^3*, existem duas escolhas de subconjunto:* $x^1 \cdot x^2 \cdot 1$ *e* $1 \cdot 1 \cdot x^3$. *Por isso o seu coeficiente na expressão que determina* $p_3(x)$ *é* 2. *É possível fazer uma correspondência biunívoca entre as somas de elementos de subconjuntos de* $\{1,2,3,\ldots,n\}$ *que valem* k *e os monômios* x^k *que aparecem no desenvolvimento de*

$$p_n(x) = (1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n).$$

Assim, para resolver o problema, basta somarmos todos os coeficientes dos monômios x^k *em* $p_{2000}(x)$ *quando* k *é um múltiplo de* 5. *Para calcular essa soma vamos precisar das raízes quintas da unidade! Seja* $w = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{5}$. *Como* w*,* w^2*,* w^3 *e* w^4 *são as raízes de* $1+x+x^2+x^3+x^4=0$*, segue que*

$$1+x+x^2+x^3+x^4 = (x-w)(x-w^2)(x-w^3)(x-w^4).$$

Substituindo $x=-1$*, temos*

$$1 = (1+w)(1+w^2)(1+w^3)(1+w^4).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{5}(1+w^{5k+j}) &= \\ (1+w)(1+w^2)(1+w^3)(1+w^4)(1+1) &= 2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} p_{2000}(w) &= \\ \prod_{k=0}^{399}\prod_{j=1}^{5}(1+w^{5k+j}) &= \\ \prod_{k=0}^{399} 2 &= 2^{200}. \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos provar que

$$p_{2000}(w^2) = p_{2000}(w^3) = p_{2000}(w^4) = 2^{400}.$$

Além disso, é fácil ver que $p_{2000}(1) = 2^{2000}$. *Como* $1^k + w^k + w^{2k} + w^{3k} + w^{4k} = 0$*, se* $5 \nmid k$*, e* 5 *em caso contrário, se* $l = \frac{2000 \cdot 2001}{2}$ *e*

$$p_{2000}(x) = \sum_{i=0}^{l} a_i x^i,$$

segue que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{4} p_{2000}(w^j) &= \\ \sum_{i=0}^{l} a_i(1+w^i+w^{2i}+w^{3i}+w^{4i}) &= \\ \sum_{i\equiv 0 \pmod 5} 5a_i. \end{aligned}$$

Finalmente, o número que procuramos é dado por

$$\begin{aligned} \sum_{i\equiv 0 \pmod 5} a_i &= \frac{1}{5}\sum_{j=0}^{4} p_{2000}(w^j) \\ &= \frac{2^{2000}+4\cdot 2^{400}}{5}. \end{aligned}$$

A solução do problema original

Para resolver o problema original, novamente vamos considerar uma numeração para as linhas e colunas do tabuleiro como em uma matriz 8×8, mas dessa vez vamos associar a cada quadradinho (ij) o monômio $x^i y^j$. A soma de todos os monômios escritos nas casas do tabuleiro gera o polinômio

$$\begin{aligned} p(x,y) &= (x+x^2+\ldots+x^8)(y+y^2+\ldots+y^8) \\ &= xy\cdot\frac{x^8-1}{x-1}\cdot\frac{y^8-1}{y-1}. \end{aligned}$$

Considere agora uma cobertura qualquer do tabuleiro e suponha que o monominó ocupa a casa (ab). Se um triminó na posição horizontal tem como casa do canto esquerdo a posição (ij), a soma dos seus monômios associados é

$$x^iy^j+x^{i+1}y^j+x^{i+2}y^j = x^iy^j(1+x+x^2).$$

Portanto, a soma de todos os monômios em peças na horizontal corresponde a um polinômio múltiplo de $(1+x+x^2)$, digamos o $(1+x+x^2)q_1(x,y)$. De modo análogo, a soma de todos os monômios escritos nas peças na vertical é um polinômio múltiplo de $1+y+y^2$, que denotaremos por $(1+y+y^2)q_2(x,y)$. Assim,

$$p(x,y) = (1+x+x^2)q_1(x,y)+(1+y+y^2)q_2(x,y)+x^ay^b.$$

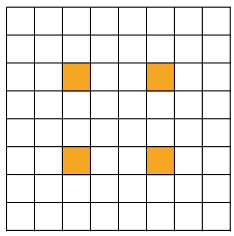
Seja $w=\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$. Como $1+w+w^2=0$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} w^aw^b &= p(w,w) \\ &= w^2\frac{w^8-1}{w-1}\cdot\frac{w^8-1}{w-1} \\ &= w^2\frac{w^2-1}{w-1}\cdot\frac{w^2-1}{w-1} \\ &= w^2(w+1)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w^aw^{2b} &= p(w,w^2) \\ &= w^3\frac{w^8-1}{w-1}\cdot\frac{w^{16}-1}{w^2-1} \\ &= \frac{w^2-1}{w-1}\cdot\frac{w-1}{w^2-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como $w^k=1$ apenas quando k é um múltipo de 3, podemos concluir que $a+b$ e $a+2b$ são multiplos de 3 e, consequentemente, a e b são múltiplos de 3. Isso nos diz que as únicas posições que podem receber o monominó em uma cobertura são as que estão pintadas de laranja na próxima figura e representam as posições $(3,3)$, $(3,6)$, $(6,3)$ e $(6,6)$.



Para verificar que todas elas são possíveis, perceba que a primeira cobertura apresentada no enunciado nos garante que uma delas é admissível. Agora perceba que basta rodar o tabuleiro três vezes por $90°$ no sentido horário para obter coberturas para as outras três posições. Isso conclui a solução.

Exercícios e sugestões de leituras

Exercício 5. *(IME) Mostre que*

$$\sum_{k\equiv 0 \pmod 3}\binom{n}{k} = \frac{1}{3}\left[2^n+2\cos(n\pi/3)\right].$$

Dica: Seja $q(x)=(1+x)^n$ e $w=\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$. Quanto vale $q(1)+q(w)+q(w^2)$?

Exercício 6. *(IMO 1974) Prove que o número*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}2^{3k}$$

não é divisível por 5 *para qualquer inteiro* $n \geq 0$.

Dica: Perceba que $2^3 \equiv -2 \pmod 5$ *e que a soma dada tem o mesmo resto que* $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}(-2)^k$ *na divisão por* 5. *Em seguida, faça a expansão binomial do número* $(1+i\sqrt{2})^{2n+1}$.

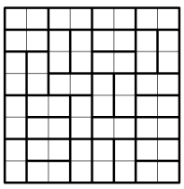
Exercício 7. *(Olimpíada de São Petesburgo) A sequência finita* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *é chamada* p*-balanceada se qualquer soma da forma* $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \ldots$ *é a mesma para qualquer* $k = 1, 2, \ldots, p$. *Prove que se a sequência com 50 membros é* p*-balanceada para* $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$ *então todos estes números são iguais a zero.*

Exercício 8. *(Fórmula da Multisecção) Se* $f(x) = \sum_k a_k x^k$, *mostre que*

$$\sum_{k \equiv r \pmod m} a_k x^k = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} w^{-rs} f(w^s x),$$

em que $w = e^{2\pi i/m}$.

Uma pergunta interessante que poderia ser feita na linha da discussão do problema original é determinar de quantos modos podemos cobrir o tabuleiro 8×8 com 21 triminós e 1 monominó?



Para um tabuleiro 8×8 sendo coberto apenas com dominós, que são peças 2×1, existem 12988816 coberturas dele com 32 dominós. A figura anterior ilustra uma delas. Na referência [5] o leitor poderá encontrar a seguinte (surpreendente) fórmula para o número de coberturas de um tabuleiro $m \times n$ com dominós:

$$\left[\prod_{k=1}^{m} \prod_{l=1}^{n} \left(2\cos\frac{\pi k}{m+1} + 2i\cos\frac{\pi l}{n+1} \right) \right]^{1/2}.$$

O problema original é da referência [2]. Para aplicações de raízes da unidade, como no Teorema de Klarner, recomendamos o capítulo 13 do excelente [1].

Bibliografia

[1] A. C. Muniz Neto, *An Excursion Through Elementary Mathematics, Volume III: Discrete Mathematics and Polynomial Algebra*, 1st ed. Springer, 2018.

[2] R. Honsberger, *In Polya's Footsteps: Miscellaneous Problems and Essays*, Mathematical Association of America, 1997.

[3] E. Lozansky and C. Rousseau, *Winning Solutions*, 1st ed. Springer, 1996.

[4] T. Andreescu, Z. Feng, and G. Yu, *Mathematical Olympiads 2000-2001: Problems and Solutions from Around the World*, 1st ed. Mathematical Association of America, 2003.

[5] J. Matousek and J. Nesetril, *Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra*, American Mathematical Society, 2010.

Samuel Feitosa é professor na Universidade Federal da Bahia desde 2012. Foi medalhista de Bronze na Olimpíada Internacional de Matemática em 2003 e é membro da Comissão Nacional de Olimpíadas de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Contribui ativamente na organização de olimpíadas e treinamentos de alunos para diversas competições matemáticas nacionais e internacionais.